

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

Учебное пособие

Ижевск 2022

В учебном пособии рассматриваются классические и современные области строительной механики – расчет статически определимых и статически неопределимых систем, дискретные методы расчета, динамика и устойчивость сооружений.

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика – одна из важнейших областей механики твердого тела. Ее методы широко используются при проектировании, расчете и обследовании сооружений. Поэтому в Государственных образовательных стандартах и программах по подготовке инженерных кадров изучению строительной механики уделяется большое внимание.

С развитием общей науки постоянно развивается и строительная механика, расширяется круг решаемых ею задач, разрабатываются новые методы и алгоритмы расчета сооружений, реализуемые с использованием современных компьютерных технологий.

Вместе с тем, в сегодняшних учебных программах постоянно уменьшается число часов, отводимых для изучения строительной механики. В результате этого все больше усложняются задачи ознакомления будущего специалиста с теоретическими основами, методами и алгоритмами строительной механики, приемами расчета сооружений на различные воздействия.

Настоящее учебное пособие написано с целью достаточно полного, последовательного и компактного изложения материала в соответствии с новыми государственными стандартами. В нем излагаются как классические основы строительной механики, так и современные методы расчета сооружений, предназначенные для реализации в составе современных расчетных комплексов с применением новейших компьютерных технологий. Курс состоит из 26 лекций и включает логически связанные три составные части:

- 1) расчет статически определимых систем (1-9 лекции);
- 2) расчет статически неопределимых систем (10-21 лекции);
- 3) динамика и устойчивость сооружений (22-26 лекции).

В конце каждой лекции даются вопросы для самоконтроля и оценки знаний.

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ В СТРОИТЕЛЬНУЮ МЕХАНИКУ

1. Предмет строительной механики

Единый объект, построенный (сооруженный) человеком, называется **сооружением**. Когда речь идет о внутреннем строении и расчете сооружения как системы элементов, его называют **системой**.

Сооружения необходимы для удовлетворения жизненных потребностей людей и улучшения качества их жизни. Они должны быть удобными, прочными, устойчивыми и безопасными.

Строительство сооружений – вид древнейшего занятия людей и древнее искусство. Результаты многих археологических раскопок, проведенных в различных частях мира, сохранившиеся до наших дней древние сооружения и здания являются доказательством этого. Их совершенство и красота говорят об искусстве и большом опыте древних зодчих и строителей.

Вопросами расчета сооружений занимается наука **строительная механика**, которую часто называют **механикой сооружений**. Считается, что строительная механика возникла сравнительно недавно, после выхода в свет в 1638 году сочинения великого итальянского ученого Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки ...».

В дальнейшем строительная механика развивалась как часть общей механики. В XIX веке, после бурного начала строительства железных дорог, мостов, больших кораблей, плотин, различных промышленных сооружений, она стала самостоятельной наукой. А в XX веке, в результате развития методов расчета и компьютерных технологий, строительная механика поднялась на современный высокий уровень.

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Строительная механика является как теоретической, так и прикладной наукой. С одной стороны, она разрабатывает теоретические основы методов расчета, а с другой стороны – является инструментом расчета, так как решает важные практические задачи, связанные с прочностью, жесткостью и устойчивостью сооружений.

Воздействие нагрузок приводит как к деформированию отдельных элементов, так и самого сооружения в целом. Расчетом и теоретической оценкой результатов их воздействия занимается **механика деформируемого твердого тела**. Частью этой науки является **прикладная механика (сопротивление материалов)**, занимающаяся расчетом простейших сооружений или их отдельных элементов. А другая ее часть – **строительная механика** – позволяет рассчитывать разные и весьма сложные многоэлементные сооружения.

Для правильного расчета сооружений следует правильно применять общие законы механики, основные соотношения, учитывающие механические свойства материала, условия взаимодействия элементов, частей и основания сооружения. На этой базе формируются **расчетная схема сооружения** и ее **математическая модель**, как некоторая система уравнений.

Чем подробнее изучаются внутреннее строение сооружения, действующая на него нагрузка и особенности материала, тем сложнее становится его математическая модель. На следующей схеме (рис. 1.1) показаны основные факторы, влияющие на особенности расчета сооружения.



Рис. 1.1

Обычно задачи строительной механики решаются в линейной постановке. Но при больших деформациях или использовании неупругих материалов ставятся и решаются нелинейные задачи.

В строительной механике большое место занимают статические и динамические задачи. Если в статике сооружений внешняя нагрузка постоянна, а элементы и части системы находятся в равновесии, то в динамике сооружений рассматривается движение системы под воздействием переменных динамических нагрузок.

Строительная механика быстро развивается. Ещё недавно, в первой половине XX века, для расчета сооружений использовались только простейшие математические модели. Но в 60-70 годы, когда начали широко внедряться компьютеры, стали применяться более сложные модели. Поэтому стало возможным проектирование, расчет и строительство сложных современных сооружений из новейших материалов.

2. Сооружения и их элементы

Сооружения весьма разнообразны. Поэтому они и классифицируются по-разному. Например, только по назначению сооружения делятся на промышленные, общественные, жилищные, транспортные, гидротехнические, подземные, сельскохозяйственные, военные и др.

В сооружениях используются элементы разных типов:

1) **стержни** – прямые или криволинейные элементы, поперечные размеры a и b которых намного меньше длины l (рис. 1.2 а, б, в);

2) **плиты** – элементы, толщина которых t меньше остальных размеров a и b ; плиты могут быть прямыми (рис. 1.2 г) и кривыми в одном или двух направлениях (рис. 1.2 д, е);

3) **массивные тела** – элементы, все три размера которых одного порядка (рис. 1.2 ж).

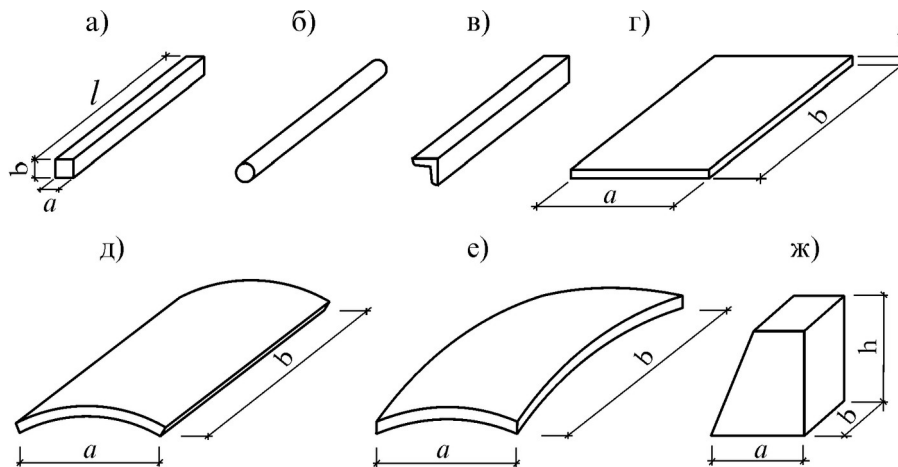


Рис. 1.2

Простейшие сооружения, состоящие из таких элементов, можно подразделять на следующие типы – **стержневые сооружения** (рис. 1.3 а, б), **складчатые сооружения** (рис. 1.3 в), **оболочки** (рис. 1.3 г) и **массивные сооружения** – подпорные стенки (рис. 1.3 д) и каменные своды (рис. 1.3 е):

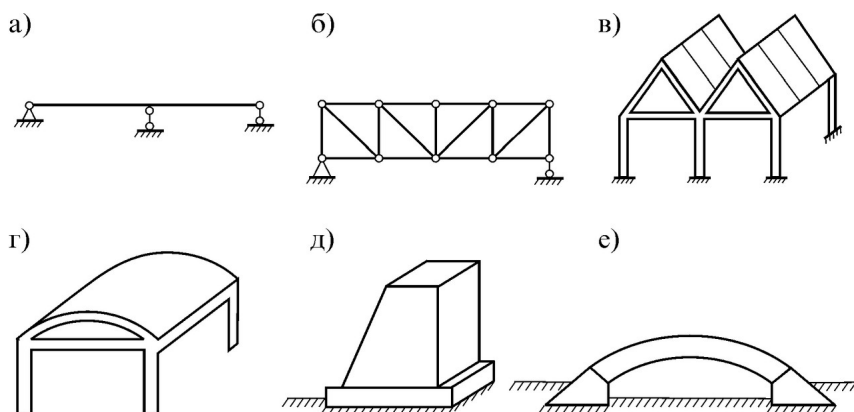


Рис. 1.3

Современные строители возводят очень сложные сооружения, состоящие из разнообразных элементов различной формы и типа. Например, достаточно распространенным является сооружение, у которого основание массивное, средняя часть может состоять из колонн стержневого типа и плит, а верхняя часть – из плит или оболочек.

3. Расчетные схемы сооружений и их классификация

Все особенности сооружений учесть невозможно. Поэтому приходится рассматривать их в упрощенном виде. Упрощенная модель сооружения называется *расчетной схемой*. Расчетная схема, состоящая из множества элементов, называется *системой*.

Любое сооружение представляет собой пространственный объект. Действующая на него внешняя нагрузка также является пространственной. Значит, и расчетную схему сооружения надо выбирать как пространственную. Однако такая схема приводит к сложной задаче составления и решения большого числа уравнений. Поэтому реальное сооружение (рис. 1.4 а) стараются привести к плоской системе (рис. 1.4 б).

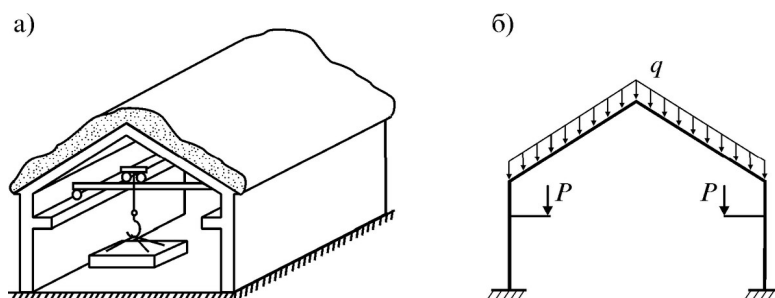


Рис. 1.4

Переход от сооружения к его расчетной схеме является сложной и ответственной задачей. Правильная расчетная схема должна отражать основные особенности сооружения. А неправильный выбор расчетной схемы может привести к неправильным результатам.

Следует отметить, что для одного и того же сооружения можно выбирать разные расчетные схемы. Выбор хорошей расчетной схемы приводит к экономии вычислений и точности результатов расчета.

Расчетные схемы сооружений можно классифицировать по-разному. Например, различают плоские и пространственные расчетные схемы, расчетные схемы по типу или способу соединения элементов, по направлению опорных реакций, по статическим и динамическим особенностям и т.д.

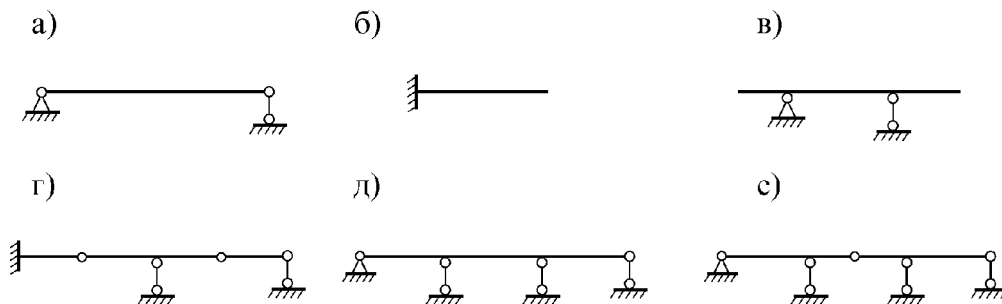
Сооружения опираются или закрепляются к основанию через какие-то опорные устройства. Взаимосвязь между сооружением и его основанием в расчетных схемах учитывается с помощью специальных знаков – **опор**. В пространственных и плоских расчетных схемах используется много типов опор. В плоских системах встречаются следующие типы опор (табл. 1.1):

Таблица 1
Основные типы опор плоских систем

Тип опоры	Условное обозначение	Реакции	Перемещения
Шарнирная опора			 Δ – перемещение; φ – угол поворота
Шарнирно-неподвижная опора			
Заделка			 Перемещений нет
Ползун			
Упругая опора (κ - жесткость)	а) б)	а) б) $M = \kappa\varphi l$ $R = \kappa\Delta$	а) б)

Рассмотрим некоторые типы простых сооружений.

1. **Балка** – изгибаемый брус. Она бывает однопролетной или многопролетной. Типы однопролетных балок: **простая балка** (рис. 1.5 а), **консоль** (рис. 1.5 б) и консольная балка (рис. 1.5 в). Многопролетные балки бывают **разрезные** (рис. 1.5 г), **неразрезные** (рис. 1.5 д) и **составные** (рис.



1.5 е):

Рис. 1.5

2. **Рама** – система прямых (ломаных или кривых) стержней. Ее стержни могут соединяться жестко или через шарнир. Вот некоторые типы рам: **простая рама** (рис. 1.6 а), **составная рама** (рис. 1.6 б), **многоэтажная рама** (рис. 1.6 в).

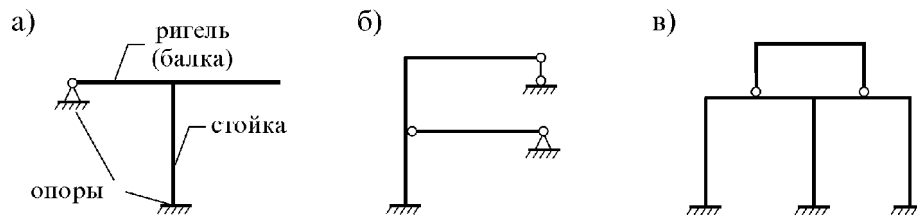
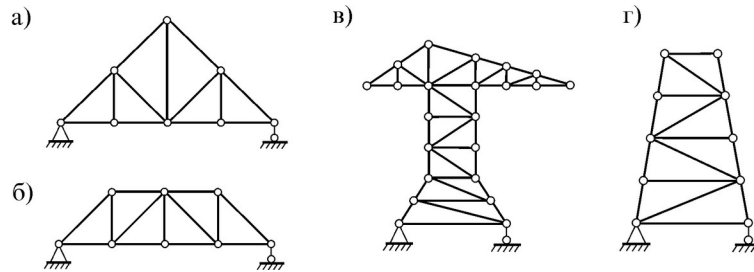


Рис. 1.6

3. **Ферма** – система стержней, соединенных шарнирами. Типов ферм много. Например, бывают **стропильная ферма** (рис. 1.7 а), **мостовая ферма** (рис. 1.7 б), **крановая ферма** (рис. 1.7 в), **башенная ферма** (рис. 1.7 г).



г).

Рис. 1.7

4. **Арка** – система из кривых стержней. Некоторые типы арок: **трехшарнирная** (рис. 1.8 а), **одношарнирная** (рис. 1.8 б), **бесшарнирная** (рис. 1.8 в) арки.

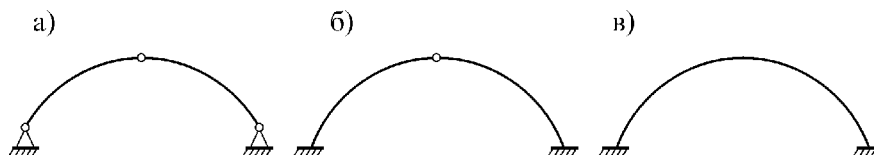


Рис. 1.8

Существуют более сложные системы как комбинации простых систем. Они называются **комбинированными системами**. Например: **арочная ферма** (рис. 1.9 а), **ферма с аркой** (рис. 1.9 б), **висячая система** (рис. 1.9 в):

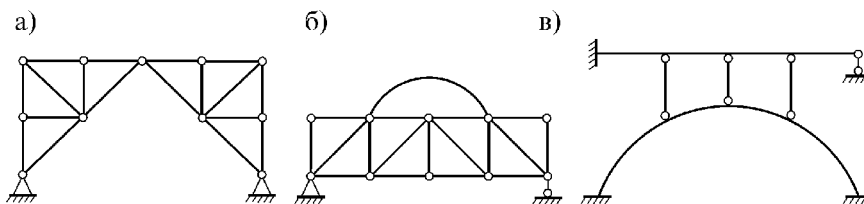


Рис. 1.9

По статическим особенностям различают **статически определимые** и **статически неопределимые** системы.

4. Механические свойства материалов. Основные гипотезы

Большинство материалов сооружений при действии малых нагрузок являются упругими и подчиняются закону Гука. При возрастании нагрузки этот закон перестает выполняться. В нашем курсе будем рассматривать только упругие материалы.

Примем некоторые *гипотезы*, которые позволяют выбирать более простые расчетные модели, упрощать и уменьшать объем вычислений:

1. Материал сооружения является упругим.
2. Перемещения точек сооружения намного меньше его размеров.
3. Перемещения пропорциональны величине нагрузки.
4. Выполняется принцип суперпозиции (независимости действия сил): результат действия нескольких сил равен сумме действий отдельных сил и не зависит от порядка приложения этих сил.

5. Внешние и внутренние силы. Деформации и перемещения

Внешние силы, действующие на сооружение, называются *нагрузкой*. Кроме того, за нагрузку могут приниматься различные сочетания внешних сил, изменение температуры, смещение опор и т.д. Нагрузки различают:

– по способу приложения. Например, *объемная нагрузка* действует во всех точках сооружения (собственный вес, инерционные силы и др.), *поверхностная нагрузка* распределена по поверхности (снег, ветер и др.).

– по времени действия. К примеру, *постоянная нагрузка* действует постоянно и зачастую сохраняется в течение всей жизни сооружения (собственный вес), *временная нагрузка* действует только в определенный период или момент (снег, ветер).

– по способу действия. Например, *статическая нагрузка* действует так, что сооружение сохраняет статическое равновесие. А *динамическая нагрузка* вызывает инерционные силы и нарушает это равновесие. Источниками динамической нагрузки являются различные машины и механизмы, ветер, землетрясения и др. *Подвижные нагрузки* меняют свое положение (поезд, автотранспорт, группа людей и т.д.).

Нагрузка, распределяясь между элементами сооружения, вызывает внутренние напряжения и деформации. В строительной механике определяются их обобщенные характеристики – внутренние усилия и перемещения. А сами напряжения и деформации определяются через внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

В о п р о с ы

1. Что изучает строительная механика?
2. Какие важные факторы определяют задачу расчета сооружения?
3. Что такое расчетная схема сооружения?
4. Как классифицируются расчетные схемы?
5. Перечислите основные типы стержневых систем.
6. Какие гипотезы принимаются для упрощения расчета сооружений?

Лекция 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Внешняя нагрузка может вызвать значительные перемещения элементов, в результате чего сооружение может перестать служить своему назначению. Поэтому ставится требование: перемещения сооружения должны быть малыми. Решением этой задачи на начальном этапе проектирования занимается специальный раздел строительной механики, называемый кинематическим анализом.

Кинематический анализ – это анализ геометрической структуры сооружения с целью исключения больших перемещений. При кинематическом анализе внешняя нагрузка обычно не рассматривается, а элементы системы считаются достаточно жесткими.

В кинематическом анализе различают три типа расчетных схем:

- 1) геометрически неизменяемые системы,
- 2) геометрически изменяемые системы,
- 3) мгновенно изменяемые системы.

Геометрически неизменяемая система (ГНС) – это система, перемещения которой возможны только при деформации ее элементов. Простейшей ГНС является шарнирный треугольник (рис. 2.1 а).

Геометрически изменяемая система (ГИС) – это система, элементы которой могут получать перемещения даже без их деформаций. Например, изменяемой является шарнирный четырехугольник (рис. 2.1 б).

Мгновенно изменяемая система (МИС) – система, способная получать лишь мгновенные перемещения (рис. 2.1 в).

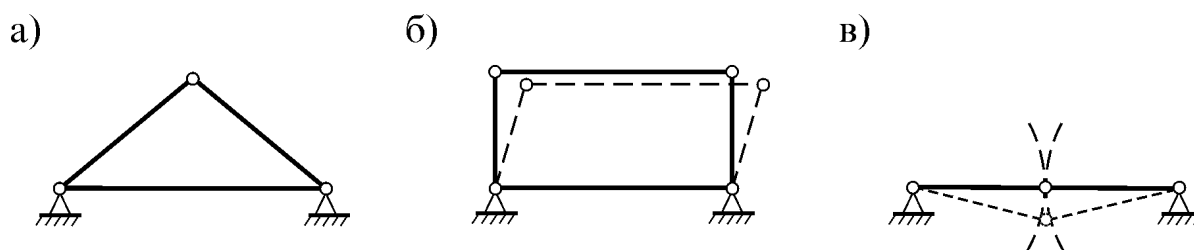


Рис. 2.1

1. Степень свободы. Кинематические связи

Количественная оценка кинематических свойств системы основана на определении ее степеней свободы как направлений возможных независимых перемещений. **Число степеней свободы (W)** – это минимальное число независимых параметров, необходимых для определения положения всех точек системы. Такими параметрами могут быть перемещения отдельных точек, углы поворота элементов и др.

Число степеней свободы простых систем можно определять путем задания ее элементам возможных перемещений (рис. 2.2 а, б, в).

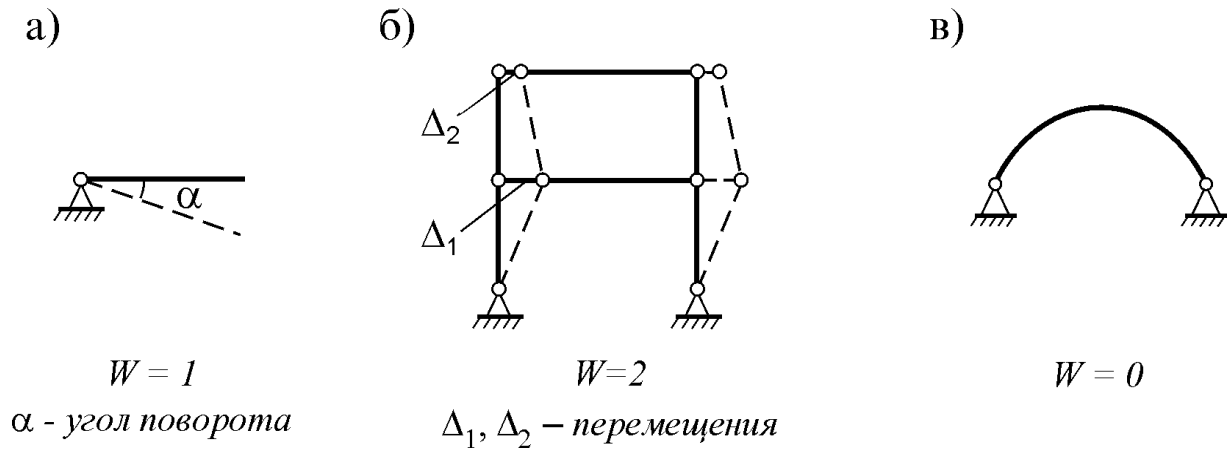


Рис. 2.2

Для изучения более сложных случаев введем следующие понятия:
диск (Д) – неизменяемая часть системы, состоящая из одного или нескольких жестко связанных элементов (рис. 2.3 а);

шарнир (Ш) – связь, дающая возможность взаимного поворота соседним дискам (рис. 2.3 б);

припайка (П) – связь, жестко закрепляющая соседние диски (рис. 2.3 в);

стержень (С) – связь, ограничивающая перемещение диска относительно другого в одном направлении (рис. 2.3 г);

опорная связь (С₀) – связь, ограничивающая перемещение диска в одном направлении по отношению к земле (рис. 2.3 д).

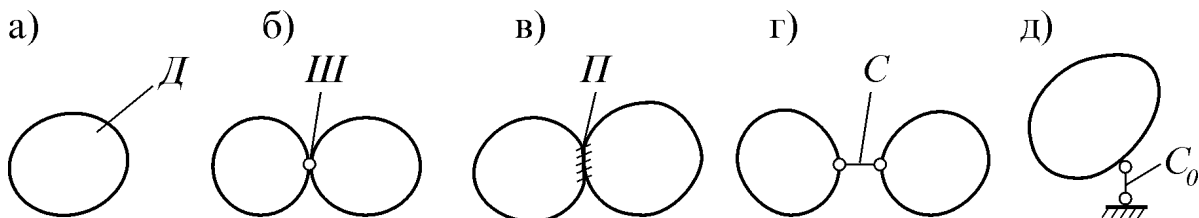


Рис. 2.3

Определим число степеней свободы точки (рис. 2.4 а) и диска с различными кинематическими связями (рис. 2.4 б-д):

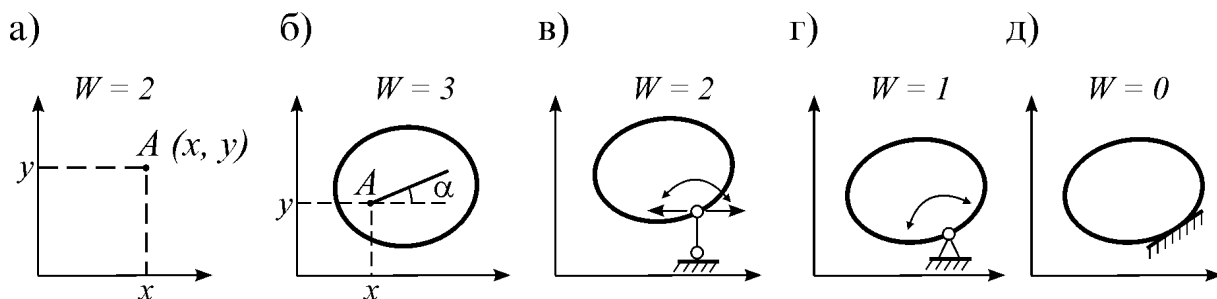


Рис. 2.4

Как видим, стержень или опорная связь уменьшают число степеней свободы на единицу, шарнир – на два, припайка – на три.

Кинематические связи должны обеспечивать неподвижность системы относительно земли (основания), а также неизменяемость ее внутренней структуры. Если при удалении одной связи из неизменяемой системы она становится изменяемой, то эта связь называется **необходимой**. Если после этого система остается неизменяемой, то связь называется **избыточной**. Связь, соединяющая систему с землей, называется **внешней**, а находящаяся внутри – **внутренней связью**.

Шарнир, объединяющий два диска, называется **простым шарниром** (рис. 2.5 а). Если шарнир объединяет несколько дисков, то он называется **кратным шарниром**. Кратный шарнир эквивалентен нескольким простым шарнирам (рис. 2.5 б, в). Кратность шарнира определяется по формуле $n_{III} = n_d - 1$, где n_d – число дисков, объединяемых шарниром.

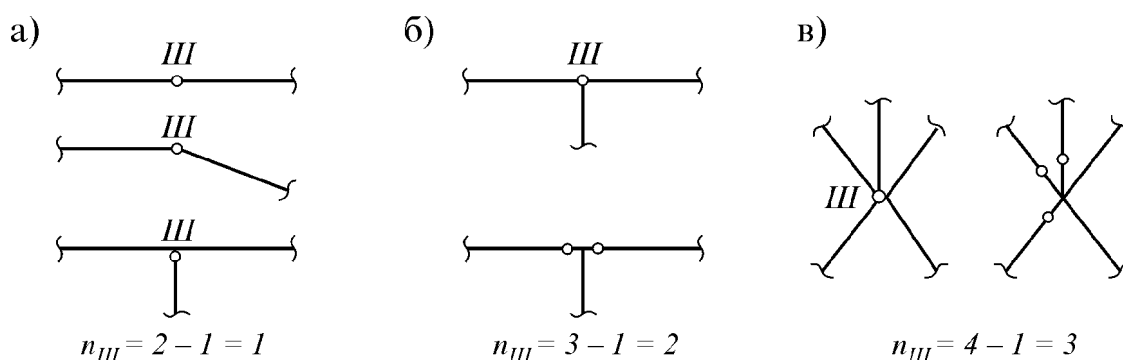


Рис. 2.5

2. Число степеней свободы стержневой системы

Рассматривая расчетную схему сооружения как систему дисков, объединенных связями, получаем ее **дисковый аналог**. Для одной и той же системы часто можно получить несколько дисковых аналогов.

Число степеней свободы плоской стержневой системы определяется по **основной формуле кинематического анализа**:

$$W = 3n_d - 2n_{III} - n_c - n_{C_0} - 3n_{II}$$

Здесь n_d – число дисков в дисковом аналоге; n_{III} – число простых шарниров; n_c – число стержней; n_{C_0} – число опорных связей; n_{II} – число припаяк.

При расчете фермы можно использовать формулу

$$W = 2n_y - n_c - n_{C_0},$$

где n_y – число узлов фермы (узлом считается любой шарнир, связывающий стержни фермы).

После расчета по этим формулам возможны три случая:

1) $W > 0$ – такая система геометрически изменяема и является механизмом;

2) $W = 0$ – в системе имеется достаточное число связей; если они введены правильно, то система неизменяема и статически определима;

3) $W < 0$ – в системе есть избыточные связи. Если эти связи введены правильно, то система неизменяема и статически неопределима.

Отсюда следует, что расчетная схема сооружения должна удовлетворять **необходимому условию геометрической неизменяемости**

$$W \leq 0.$$

В качестве примера рассмотрим три расчетные схемы (рис. 2.6 а, в, д) и их дисковые аналоги (рис. 2.6 б, г, е, ж).

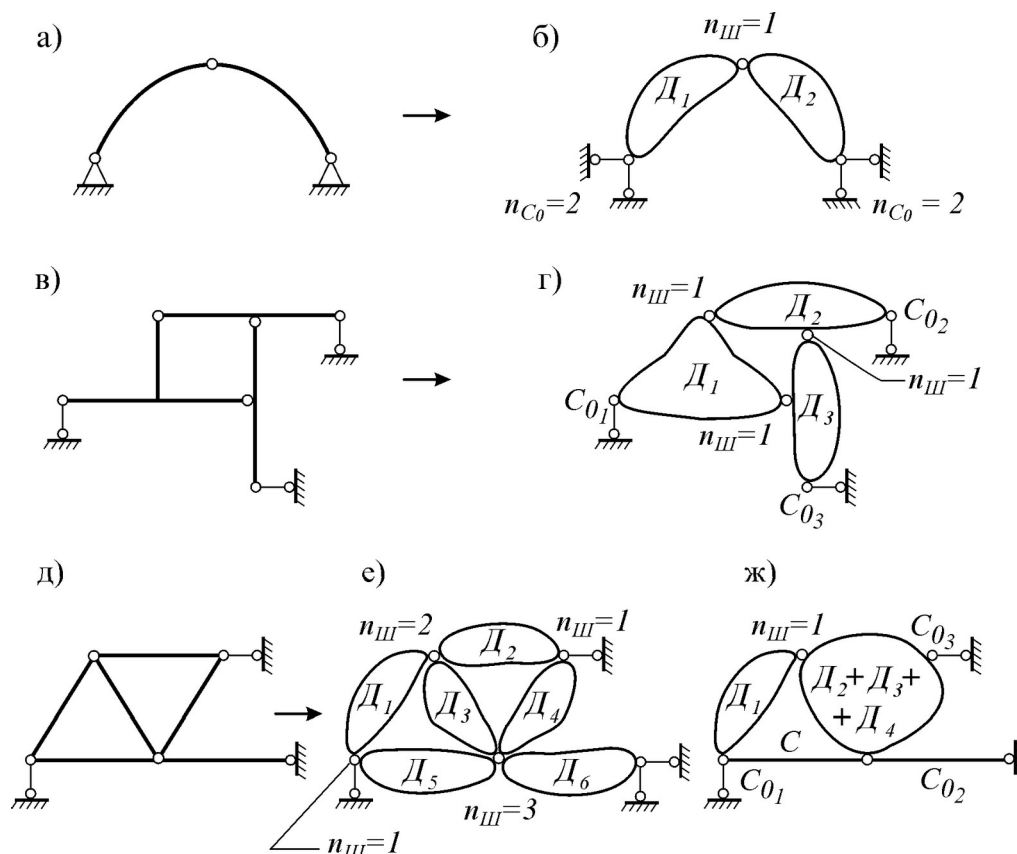


Рис. 2.6

Вычислим число степеней свободы этих систем:

1) арка (рис. 2.6 а), по рис. 2.6 б: $n_d=2, n_{ш}=1, n_c=0, n_{C_0}=4, n_{п}=0$;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

2) рама (рис. 2.6 в), по рис. 2.6 г: $n_d=3, n_{ш}=3, n_c=0, n_{C_0}=3, n_{п}=0$;

$$W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 - 3 - 3 \cdot 0 = 0.$$

3) ферма (рис. 2.6 д):

– по рис. 2.6 е: $n_d=6, n_{ш}=7, n_c=0, n_{C_0}=4, n_{п}=0$;

$$W=3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по рис. 2.6 ж: $n_d=2, n_{ш}=1, n_c=1, n_{C_0}=3, n_{п}=0$;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по формуле для фермы (рис. 2.6 д): $n_y=4, n_c=5, n_{C_0}=3$;

$$W=2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0.$$

3. Способы образования неизменяемых систем

Выполнение условий, рассмотренных выше, необходимо, но не достаточно. Например, число степеней свободы систем на рис. 2.7 а, в одинаково: $W=0$, поэтому необходимое условие их геометрической неизменяемости выполняется. Но, тем не менее, обе системы геометрически изменяемы. Причиной их изменяемости является неправильная постановка связей. Для того чтобы эти системы стали геометрически неизменяемыми, одну связь в них нужно переставить в другое место (рис. 2.7 б, г).

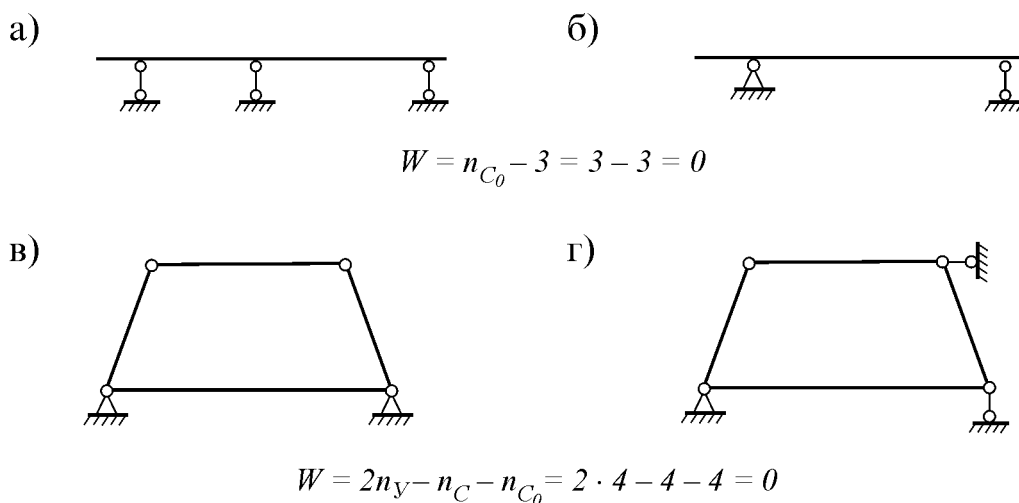


Рис. 2.7

Из этих примеров следует, что для полной уверенности в неизменяемости системы нужна дополнительная оценка системы – **проверка геометрической структуры**. Ее суть заключается в проверке способов объединения элементов между собой и с землей. Для такой проверки необходимо:

- выделить в системе неизменяемые фигуры – диски;
- последовательно объединять эти диски между собой, используя способы образования неизменяемых систем.

Рассмотрим **простейшие способы образования геометрически неизменяемых систем**:

1. Новый узел к диску должен добавляться способом диады – двумя непараллельными стержнями (рис. 2.8 а).
2. Два диска должны объединяться:
 - способом триады – тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке связями (рис. 2.8 в);
 - одним шарниром и одной связью (рис. 2.8 б). Этот способ вытекает из способа триады;
3. Три диска должны объединяться тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 2.8 г). Шарниры могут быть условными (рис. 2.8 д).

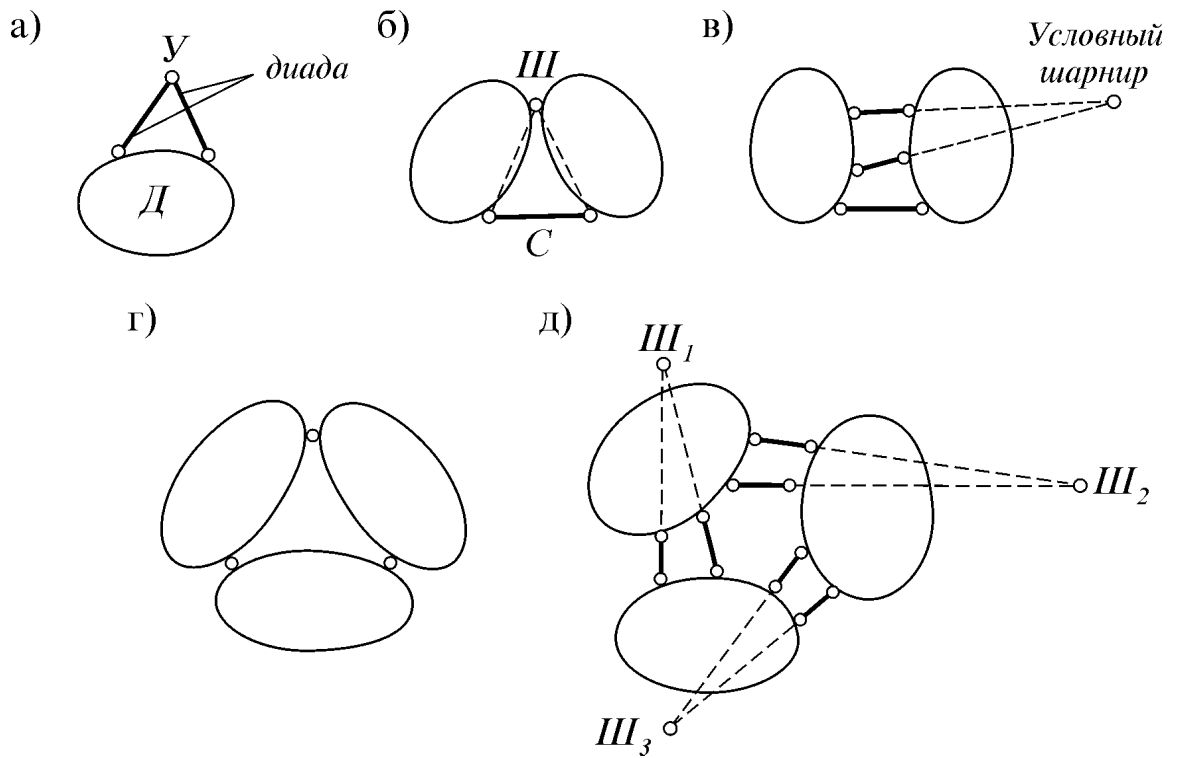


Рис. 2.8

4. Понятие о мгновенно изменяемых системах

Расчетная схема любого инженерного сооружения не должна быть изменяемой или мгновенно изменяемой. Если изменяемость системы обычно возникает из-за недостатка связей, то мгновенная изменяемость возникает при их неправильной установке (рис. 2.9 а, г, д, е).

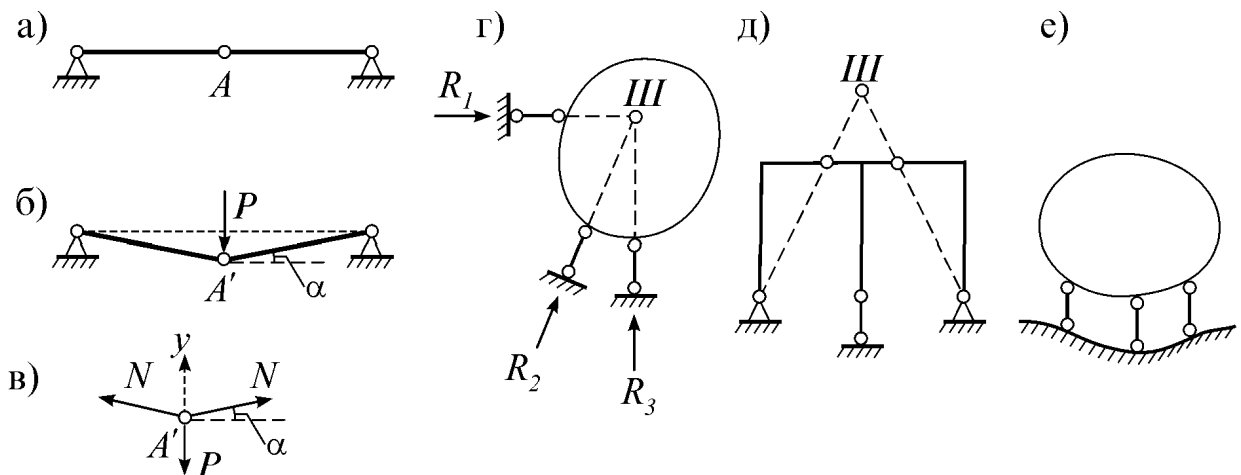


Рис. 2.9

Обнаружить мгновенную изменяемость очень важно уже на этапе кинематического анализа, так как это позволяет вносить коррективы в расчетную схему сооружения.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 2.9 а) и выясним, почему же она является мгновенно изменяемой.

1. При действии на эту балку сосредоточенной силы P ее положение изменяется (рис. 2.9 б). Запишем условие равновесия системы сил, сходящихся в точке A (рис. 2.9 в):

$$\sum Y = N \sin \alpha - P = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Если в этой формуле $\alpha = 0$, т.е. когда стержни AB и BC лежат на одной прямой, то $N = \infty$. Таким образом, мгновенная изменяемость опасна тем, что усилия в элементах системы могут быть очень большими.

2. Если в последней формуле примем $P = 0$, внутреннее усилие становится неопределенным: $N = 0/0$.

Этот результат лежит в основе **метода нулевой нагрузки**. Суть метода заключается в следующем:

- удалить все силы, действующие на систему;
- вычислить внутренние усилия. Если они все (включая и опорные реакции) будут равны нулю, то система неизменяема. Если же хотя бы одно усилие будет неопределенным (типа $0/0$), то данная система является мгновенно изменяемой.

Общие выводы. Расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. С целью проверки геометрической неизменяемости системы проводится ее кинематический анализ, состоящий из двух этапов:

1) **количественный анализ** – проводится по основной формуле кинематического анализа; должно выполняться условие $W \leq 0$;

2) **качественный анализ** – проводится с использованием способов образования геометрически неизменяемых систем.

В о п р о с ы

1. Какие системы называются геометрически неизменяемыми, изменяемыми и мгновенно изменяемыми?

2. Что такое число степеней свободы?

3. Как записывается основная формула кинематического анализа?

4. Как классифицируются системы по числу их степеней свободы?

5. В чем заключается необходимое условие геометрической неизменяемости?

6. Как проверяется геометрическая неизменяемость системы?

7. Какие способы образования неизменяемых систем знаете?

8. Каков порядок кинематического анализа?

9. Что такое метод нулевой нагрузки?

10. В чем заключается количественный анализ геометрической неизменяемости?

11. Как проводится качественный анализ?

Лекция 3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Важной задачей расчета сооружений является определение их напряженно-деформированного состояния (НДС). Эта задача состоит из:

- определения опорных реакций и внутренних усилий;
- определения напряжений;
- определения перемещений и деформаций.

Перед расчетом должны быть установлены геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Наиболее простым является расчет статически определимых систем.

Статически определимой называется система, внутренние усилия которой можно определить только из уравнений статики (равновесия).

Статически определимые системы (СОС) имеют свои особенности:

- 1) их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;
- 2) воздействие температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;
- 3) если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

1. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции.

При определении опорных реакций используется **принцип освобождения от связей**: всякое тело можно освободить от связей, заменив их воздействие реакциями. После этого из уравнений равновесия можно определить величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы записываются в трех формах:

$$1) \sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0$$

($\sum X$ и $\sum Y$ – суммы проекций на взаимно-пересекающиеся оси x и y , $\sum M_A$ – сумма моментов всех сил относительно любой точки A на плоскости);

$$2) \sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

(точки A и B не должны лежать на одном перпендикуляре к оси x);

$$3) \sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0$$

(точки A, B, C не должны лежать на одной прямой).

2. Внутренние усилия стержневой системы

В элементах плоской стержневой системы возникают три усилия: продольная сила N , поперечная сила Q , изгибающий момент M . Для любого поперечного сечения стержня они определяются как на рис. 3.1.

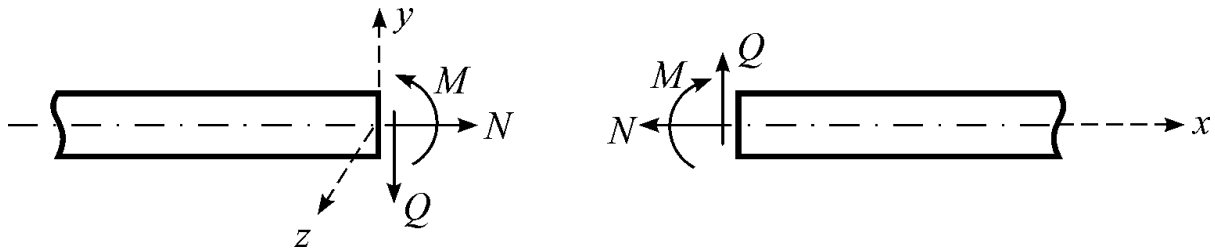


Рис. 3.1

Изгибающий момент – это сумма моментов всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения относительно оси z :

$$M_{\text{лев}} = M_{iz} - M_{jz}.$$

В строительной механике знак изгибающего момента обычно не устанавливается, а эпюра M изображается на стороне растянутого волокна.

Поперечная сила – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения на ось y :

$$Q_{\text{лев}} = P_{iy} - P_{jy}.$$

Поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает его против часовой стрелки.

Продольная сила – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения, на ось x :

$$N_{\text{лев}} = P_{ix} - P_{jx}.$$

Продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между M и Q существует дифференциальная зависимость:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Исходя из геометрического смысла первой производной, величина Q равняется тангенсу угла между осью эпюры M и касательной к ней.

По эпюре M можно определить знак Q . Для этого ось эпюры M нужно повернуть до совпадения с касательной к ней. Если поворот будет по часовой стрелке, Q будет со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «-».

Эпюры поперечных и продольных сил можно изображать на любой стороне от оси стержня, но эпюру изгибающего момента нужно обязательно изображать на стороне растянутого волокна.

3. Методы определения внутренних усилий

Внутренние усилия статически определимых систем определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла, замены связей и др.

3.1. Метод простых сечений

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия).

Например, внутренние усилия балки (рис. 3.2 а) в сечении K определяются как на рис. 3.2 б).

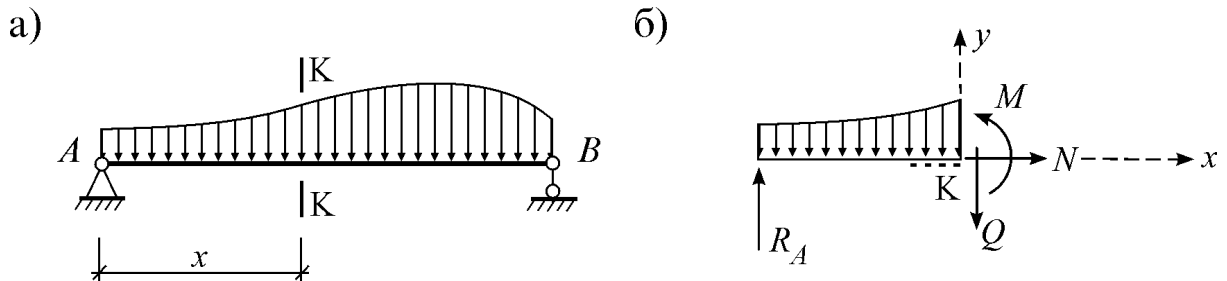


Рис. 3.2

Алгоритм метода простых сечений:

- 1) поделить систему на участки;
- 2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
- 3) выбрать одну (наиболее простую) из отсеченных частей;
- 4) составить три уравнения равновесия;
- 5) из них определить внутренние усилия M , Q , N ;
- 6) для данного участка построить эпюры M , Q , N ;
- 7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.

3.2. Метод совместных сечений

Этот метод используется при расчете многодисковых систем.

Например, для расчета трехдисковой рамы (рис. 3.3 а) проводятся три совместных сечения I , II , III . В результате появляются девять неизвестных реакций (рис. 3.3 б): опорные реакции R_1 , R_2 , H и междисковые реакции X_1 , X_2 , X_3 , Y_1 , Y_2 , Y_3 . Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, т.е. $3 \cdot 3 = 9$ уравнений, из их решения определяются все 9 реакций.

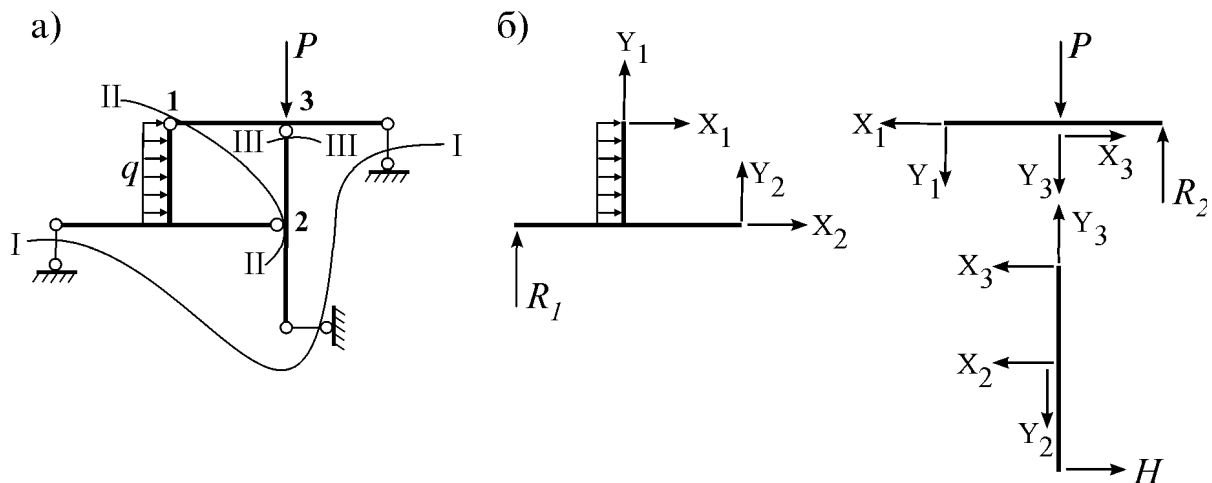


Рис. 3.3

Алгоритм метода совместных сечений:

- 1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- 2) обозначить опорные и междисковые реакции;
- 3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
- 4) решить систему полученных уравнений;
- 5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- 6) объединить все эпюры в общие эпюры M , Q , N .

3.3. Метод вырезания узла

Используется для определения усилий простых систем.

Сущность метода: вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле, проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Например, при расчете балочно-ферменной системы (рис. 3.4 а), после того как определены опорные реакции (рис. 3.4 б), вырезается узел А (рис. 3.4 в) и составляются уравнения равновесия:

$$\sum X = N_2 \cos 45^\circ - N_1 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ + P/2 = 0.$$

Из них определяются искомые продольные силы: $N_1 = N_2 = -\frac{P}{4 \sin 45^\circ}$.

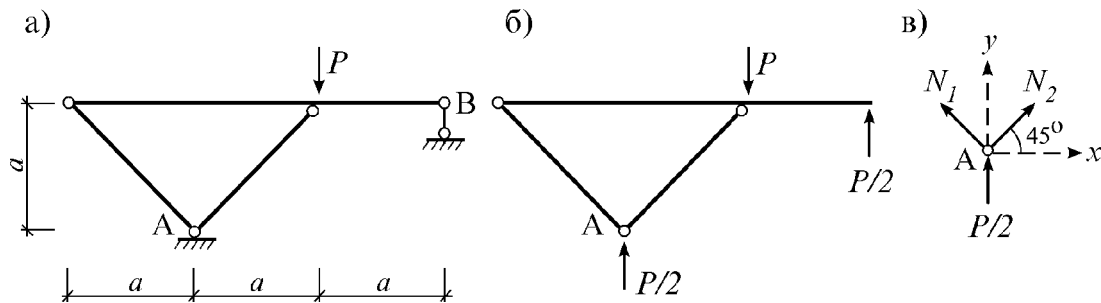


Рис. 3.4

3.4. Метод замены связей

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

Сущность метода: сложная система превращается в более простую путем перестановки связи (или нескольких связей) в другое место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными методами.

Например, для расчета рамы (рис. 3.5 а) удалим правый вертикальный стержень заданной системы (ЗС) и введем одну связь в левый шарнир. Тогда шарнир станет припайкой С, а примыкающие к нему стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через X , получим так называемую **основную систему** (ОС) для расчета рамы (рис. 3.5 б).

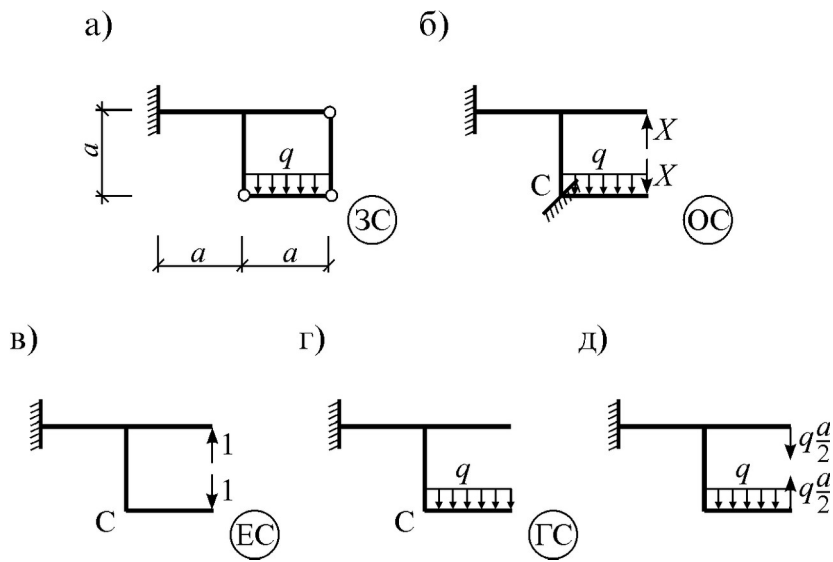


Рис. 3.5

Условием эквивалентности ОС по отношению к ЗС будет условие равенства нулю момента в точке С: $M_C=0$. По принципу суперпозиции, этот момент равняется сумме моментов от силы X и внешней нагрузки:

$$M_C = M_{C,X} + M_{C,P} = 0.$$

Далее рассмотрим два состояния ОС:

1) единичное состояние (ЕС), где прикладываются силы $X=1$ (рис. 3.5 в);

2) грузовое состояние (ГС), где прикладывается нагрузка (рис. 3.5 г).

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\overline{M}_C X + M_{C,P} = 0,$$

где $\overline{M}_C = 1 \cdot a = a$ – момент в точке С в единичном состоянии (рис. 3.5 в);

$M_{C,P} = qa^2 / 2$ – момент в точке С в грузовом состоянии (рис. 3.5 г).

Теперь неизвестное усилие легко вычисляется:

$$X = - \frac{M_{C,P}}{\overline{M}_C} = - \frac{qa^2}{2a}$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы (рис. 3.5 д).

В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются соответствующие условия эквивалентности:

$$\begin{aligned} s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1P} &= 0, \\ s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2P} &= 0, \\ \dots & \\ s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nP} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь 1, 2, ..., n – заменяемые связи; X_1, X_2, \dots, X_n – неизвестные внутренние усилия в этих связях; s_{ij} – усилие в i -ой связи в j -ом единичном состоянии; S_{iP} – усилие в i -ой связи в грузовом состоянии.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n .

Общий вывод. Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля ($\det \neq 0$), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю ($\det = 0$), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае система является мгновенно изменяемой.

В о п р о с ы

1. Какая система называется статически определимой?
2. Какие особенности имеет статически определимая система?
3. Какие формы уравнений равновесия можно записать для плоской системы?
4. Что такое изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, как определяются их знаки?
5. Какие методы используются при расчете статически определимых систем?
6. В чем сущность метода замены связей?
7. Какой общий вывод можно сделать после анализа методов расчета статически определимых систем?

Л е к ц и я 4

РАСЧЕТ ФЕРМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Ферма – это геометрически неизменяемая система, состоящая из прямых стержней, соединенных в узлах жестко или шарнирно (рис. 4.1 а). Замена жестких узлов фермы шарнирами превращает ее в шарнирную ферму (рис. 4.1 б) и упрощает расчет.

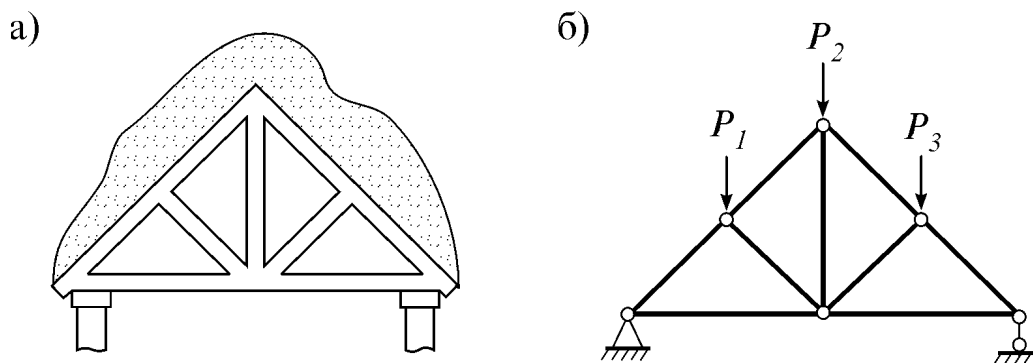


Рис. 4.1

Для статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирных ферм должно выполняться условие

$$2n_y \quad n_C \quad n_C \cdot 0$$

При действии узловой нагрузки стержни фермы работают в основном на растяжение или сжатие, а моменты и поперечные силы в них отсутствуют. Поэтому в стержнях шарнирной фермы определяются только продольные усилия.

Положительное усилие N_{ij} в стержне фермы между узлами i и j (рис. 4.2 а) следует направить в сторону от шарниров (рис. 4.2 б).

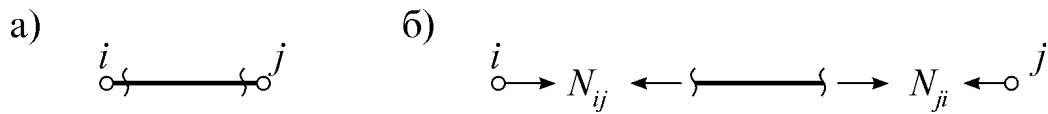


Рис. 4.2

При расчете ферм используются различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

1. Метод вырезания узлов

Этот метод основан на последовательном вырезании и рассмотрении равновесия узлов фермы.

Сущность метода: вырезается узел, в котором не более двух неизвестных; составляются уравнения равновесия $\sum X=0$ и $\sum Y=0$; из них определяются неизвестные продольные усилия. После этого можно вырезать следующий узел и продолжить расчет.

В методе вырезания узлов необходимо установить порядок вырезания узлов. Например, для расчета фермы (рис. 4.3 а) сначала вырежем узел А (рис. 4.3 б) и запишем уравнения равновесия:

$$\sum X = N_{A-10} + N_{A-1} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_{A-1} \sin \alpha + 1,5P = 0.$$

Из них: $N_{A-1} = -1,5P / \sin \alpha$; $N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$.

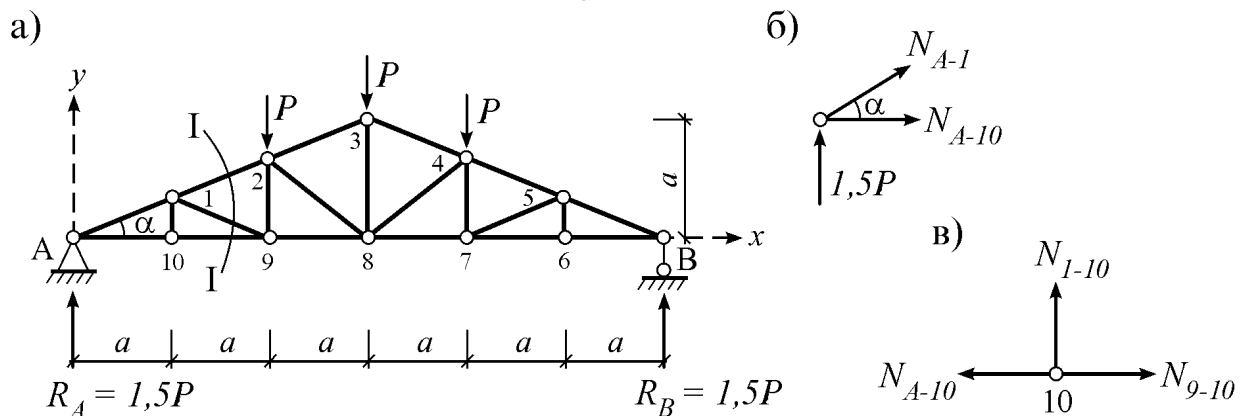


Рис. 4.3

Теперь вырежем узел 10 (рис. 4.3 в) и запишем условия равновесия:

$$\sum X = N_{9-10} - N_{A-10} = 0;$$

$$\sum Y = N_{1-10} = 0.$$

Из них получаем: $N_{9-10} = N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$; $N_{1-10} = 0$.

После этого можно вырезать узлы 1, 9, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5.

У метода вырезания узлов есть недостаток: ошибка (неточность), допущенная при расчете одного узла, влияет на последующие вычисления. Поэтому результаты, полученные этим методом, надо контролировать.

Например, результаты расчета фермы могут быть проверены по формуле

$$N_i l_i = P_x x + P_y y,$$

где N_i – усилия в стержнях, l_i – длины стержней, P_x и P_y – проекции нагрузок (включая и опорные реакции), x и y – координаты нагрузок.

Из метода вырезания узлов вытекают следующие **признаки, упрощающие расчет ферм**:

1) если в узле сходятся два стержня и внешняя нагрузка не приложена (рис. 4.4 а), то оба усилия равны нулю: $N_1 = N_2 = 0$;

2) если в узле сходятся два стержня, а внешняя нагрузка действует в направлении одного стержня (рис. 4.4 б), то $N_1 = P$, $N_2 = 0$;

3) если в трехстержневом узле два стержня лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 в), то усилия в двух стержнях равны: $N_1 = N_2$, а усилие в боковом стержне равно нулю: $N_3 = 0$;

4) если в четырехстержневом узле стержни попарно лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 г), то усилия попарно равны между собой: $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$.

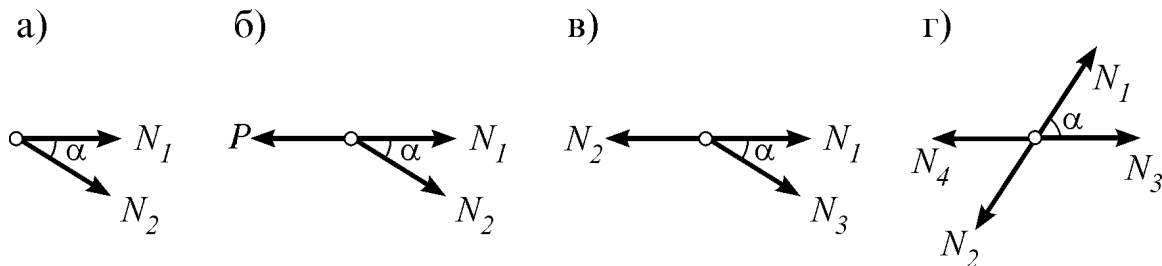


Рис. 4.4

Используя эти признаки, легко определяются некоторые усилия рассмотренной фермы (рис. 4.3 а):

- по 2-му признаку $N_{1-10} = N_{1-9} = N_{2-9} = 0$; $N_{5-6} = N_{5-7} = N_{4-7} = 0$;
- по 3-му признаку $N_{A-10} = N_{9-10} = N_{8-9}$; $N_{B-6} = N_{6-7} = N_{7-8}$; $N_{A-1} = N_{1-2}$; $N_{B-5} = N_{4-5}$.

2. Метод сквозных сечений

Этот метод позволяет определять усилие в стержне фермы, решая только одно уравнение.

Сущность метода: поперек фермы проводится такое сквозное сечение, чтобы появилось не более трех неизвестных усилий; в точке пересечения направлений двух из них составляется уравнение момента, из которого определяется третье усилие.

Точка, в которой составляется уравнение момента, называется **моментной точкой**.

В качестве примера рассмотрим ту же ферму, проведя поперек второй панели сквозное сечение I–I (рис. 4.3 а). Рассматривая равновесие левой части от сечения (рис. 4.5), составим уравнение момента в точке 1:

$$\sum M_1 = N_{9-10} \frac{a}{3} - 1,5Pa = 0.$$

Отсюда получаем: $N_{9-10} = 4,5P$.

Точка 9 является моментной точкой для N_{1-2} . Поэтому

$$\sum M_9 = -N_{1-2} b - 1,5P2a = 0.$$

Так как $b = 2a \sin \alpha$, получаем $N_{1-2} = -1,5P / \sin \alpha$.

Для N_{1-9} моментной является точка А: $\sum M_A = -N_{1-9}c = 0$. Отсюда $N_{1-9} = 0$.

Иногда (например, когда два стержня параллельны) моментной точки не существует. В этом случае вместо уравнения момента следует составлять уравнение проекции на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

У метода сквозных сечений есть один недостаток: в сложных фермах не удастся провести такое сквозное сечение, чтобы появились только три неизвестных усилия. В этом случае часть неизвестных нужно определить заранее или использовать другие методы.

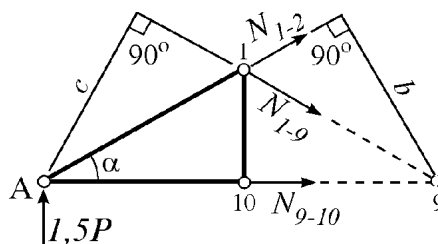


Рис. 4.5

3. Метод совместных сечений

Этот метод используется для расчета ферм, которые невозможно рассчитать методами вырезания узлов и сквозных сечений.

Сущность метода: поперек фермы проводятся несколько совместных сечений; для полученных частей фермы составляются уравнения равновесия; эти уравнения решаются совместно; затем каждая часть фермы рассчитывается отдельно.

Например, опорные реакции фермы на рис. 4.6 а легко определить, но усилия в ее стержнях нельзя определить способами вырезания узлов и сквозных сечений. Поэтому проводим совместные сечения I-I и II-II и рассматриваем равновесие двух полученных частей (рис. 4,6 б, в).

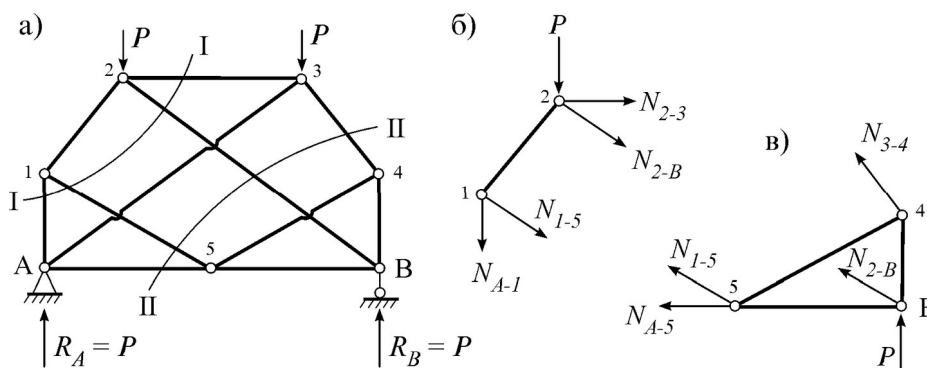


Рис. 4.6

В них имеются шесть неизвестных усилий N_{A-1} , N_{1-5} , N_{2-3} , N_{2-B} , N_{3-4} , N_{A-5} . Их можно найти составив по три уравнения равновесия для обеих частей. Затем, используя способ вырезания узлов, определяются и остальные усилия в стержнях фермы N_{1-2} , N_{5-B} , N_{4-B} , N_{A-3} , N_{4-5} .

4. Расчет шпренгельных ферм

С целью экономии материала в фермах стремятся использовать стержни малого поперечного сечения. Однако это может привести к значительному изгибу и потере устойчивости некоторых стержней. Для исключения таких явлений в панели такой фермы (рис. 4.7 а) вводят дополнительные стержни – шпренгельные элементы и получают **шпренгельную ферму** (рис. 4.7 б). В дальнейшем первоначальную ферму (ферму без шпренгелей) для простоты будем называть **главной фермой**.

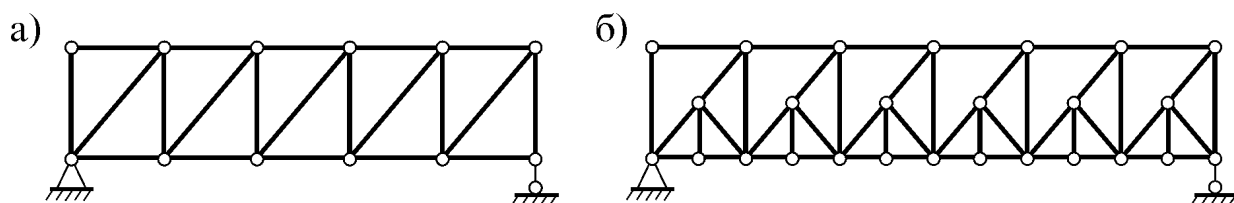


Рис. 4.7

Шпренгели фермы могут быть одноэтажными и двухэтажными. Одноэтажный шпренгель воспринимает внешнюю нагрузку в пределах одной панели и передает ее в узлы только одного пояса, а двухэтажный – передает внешнюю нагрузку и в узлы другого пояса (из нижнего пояса в верхний, и наоборот).

Рассмотренные выше методы можно использовать и для расчета шпренгельных ферм. Однако их расчет упрощается, если разложить ферму на главную ферму и закрепленные в узлах шпренгели. На рис. 4.8 показан пример такого разложения для одной панели одноэтажной (рис. 4.8 а, б, в) и двухэтажной (рис. 4.8 г, д, е) шпренгельных ферм.

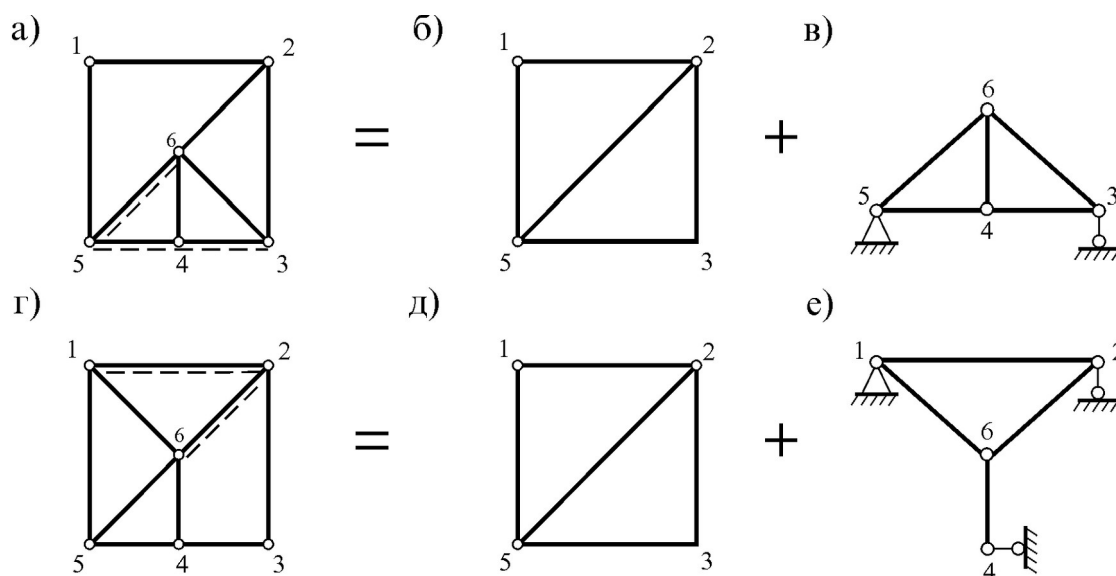


Рис. 4.8

При расчете многих шпренгельных ферм можно выделить три разных типа стержней:

- стержни 1 типа – входят только в главную ферму;
- стержни 2 типа – входят только в шпренгели;
- стержни 3 типа – входят в состав и главной фермы, и в состав шпренгелей.

Например, на рис. 4.8 а стержни фермы 1-2, 2-3, 1-5 и 2-6 (как часть элемента 2-5) будут относиться к первому; стержни 3-6 и 4-6 – ко второму; стержни 5-6, 4-5 и 3-4 – к третьему типу. А стержни 1-5, 2-3, 3-4, 5-4 и 5-6 фермы на рис. 4.8 г будут первого, стержни 1-6 и 4-6 – второго, стержни 1-2 и 2-6 – третьего типа. Кроме того, стержни третьего типа на рис. 4.8 а, г дополнительно отмечены пунктирной линией.

Расчет шпренгельной фермы начинается с расчета тех шпренгелей, к которым приложена узловая нагрузка (например, в узле 4). После этого определяются опорные реакции шпренгеля и методом вырезания узлов – продольные усилия во всех стержнях шпренгелей N_i .

Затем проводится расчет главной фермы (фермы без шпренгелей), на которую прикладываются все ее узловые силы, а также дополнительные силы со стороны шпренгелей, равные опорным реакциям шпренгелей и приложенных в обратном направлении. Далее любым из рассмотренных выше методов вычисляются продольные усилия во всех стержнях главной фермы N_i .

После этого определяются окончательные величины усилий в стержнях шпренгельной фермы, которые вычисляются по следующим формулам:

- для стержней 1 типа: $N_i = N_i$;
- для стержней 2 типа: $N_i = N_i$;
- для стержней 3 типа: $N_i = N_i + N_i$.

В о п р о с ы

1. Какие упрощения принимаются при расчете ферм?
2. Как записывается условие статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирной фермы?
3. Какие методы используются при расчете ферм?
4. В чем сущность метода вырезания узлов?
5. В чем недостаток метода вырезания узлов?
6. Какие признаки (частные случаи) упрощают расчет ферм?
7. В чем сущность метода сквозных сечений?
8. В чем недостаток метода сквозных сечений и как его избежать?
9. Что такое моментная точка и как ее определить?
10. В чем сущность метода совместных сечений?
11. Что такое шпренгельная ферма?
12. На какие типы делятся стержни шпренгельной фермы?
13. Каков порядок расчета шпренгельных ферм?

Лекция 5

РАСЧЕТ МНОГОДИСКОВЫХ СИСТЕМ

1. Расчет разрезных балок

В зависимости от расположения опор и шарниров, расчетные схемы разрезных балок могут быть разными (рис. 5.1).

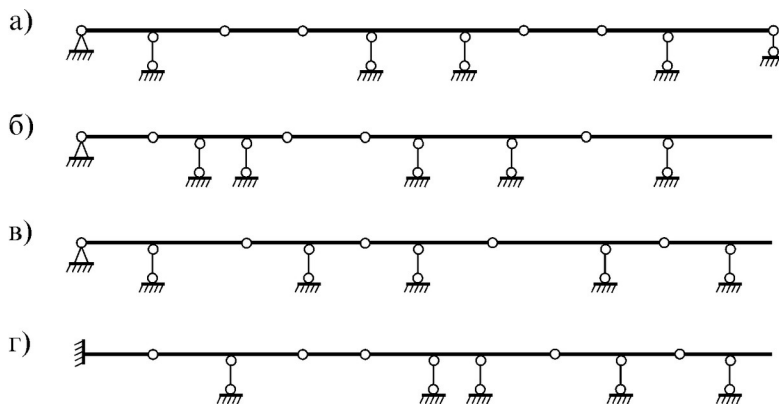


Рис. 5.1

Для геометрической неизменяемости и статической определимости разрезных балок должно выполняться условие

$$\eta_{III} \quad n_{C_0} \quad 3.$$

Взаимодействие частей разрезной балки легче изучать путем составления их этажных схем. Для этого выявляются те части балки, которые могут самостоятельно нести внешнюю нагрузку (назовем их **главными балками**). Все главные балки изображаются на нижнем этаже. Те части балки, которые примыкают к главным балкам и могут нести нагрузку только при опирании на главные балки (**подвесные балки**), изображаются выше и т.д. В результате получается этажная схема балки.

Например, рассмотренные на рис. 5.1 разрезные балки можно представить в виде следующих этажных схем (рис. 5.2).

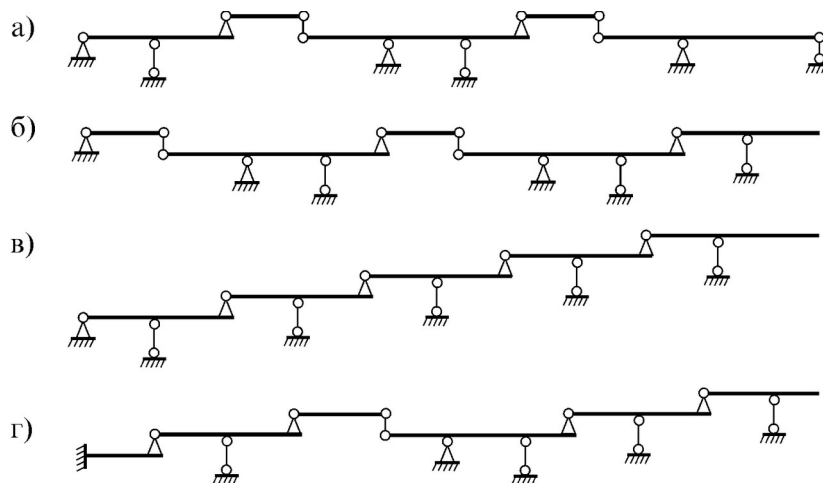


Рис. 5.2

Расчет разрезных балок начинается с самого верхнего этажа: определяются опорные реакции и внутренние усилия этой части балки от ее нагрузки. После этого переходим к нижележащему этажу. Однако, кроме своей нагрузки, к нему следует приложить и давление от вышележащего этажа (которое равно реакции вышележащего этажа, но направлено в противоположную сторону). Затем определяются его реакции и внутренние усилия. Расчет продолжается до самого нижнего этажа.

Рассмотрим пример (рис. 5.3 а). Вначале строим этажную схему (рис. 5.3 б), проводим расчет подвесной балки (рис. 5.3 в), а затем главной балки (рис. 5.3 г). Полученные эпюры для отдельных частей балки объединяем в общие эпюры M и Q (рис. 5.3 д, е).

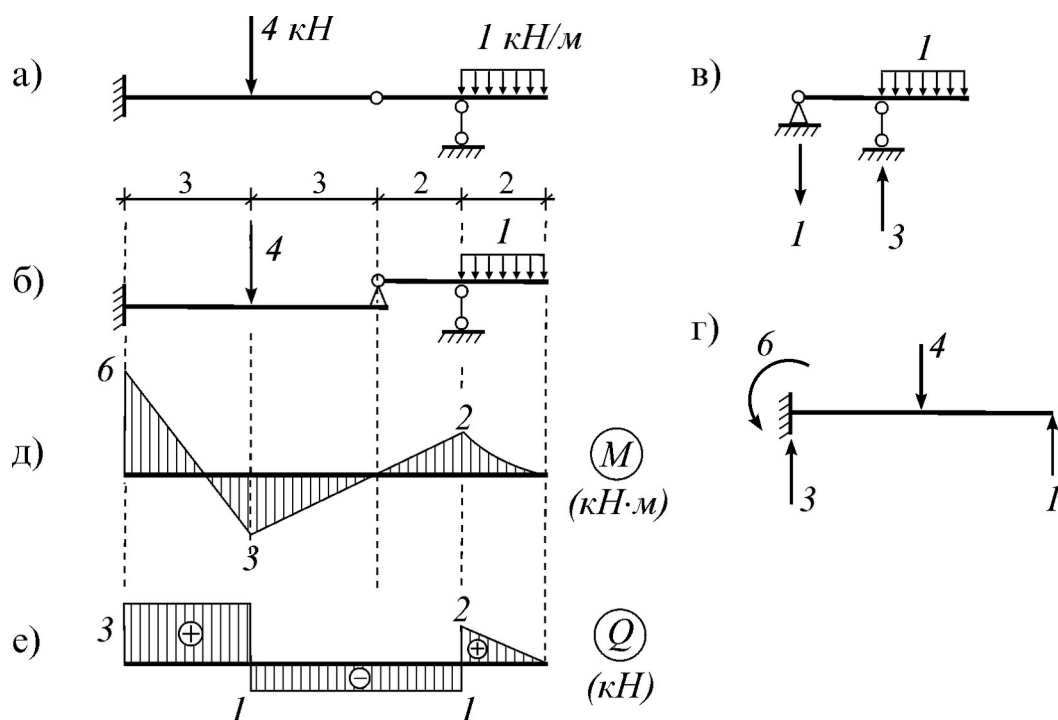


Рис. 5.3

2. Расчет трехшарнирных систем

Трехшарнирная система – это система из двух дисков, связанных между собой и основанием тремя шарнирами. Есть трехшарнирные системы двух видов: арочные (рис. 5.4 а) и подвесные системы (рис. 5.4 б).

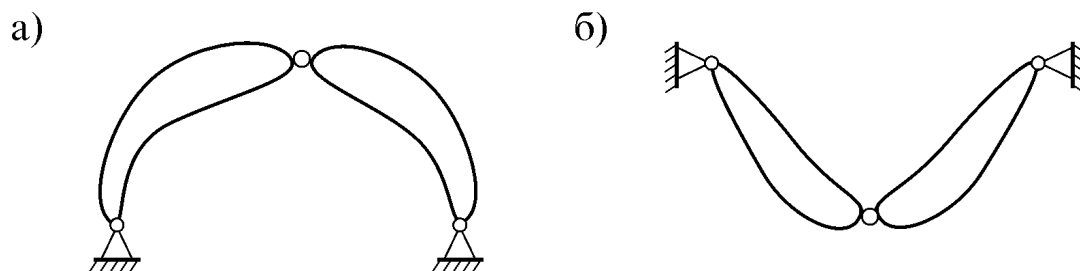


Рис. 5.4

Их расчет мало отличается друг от друга. Поэтому остановимся на арочных системах, которые бывают трех типов: трехшарнирные рамы (рис. 5.5 а), трехшарнирные арочные фермы (рис. 5.5 б) и трехшарнирные арки (рис. 5.5 в):

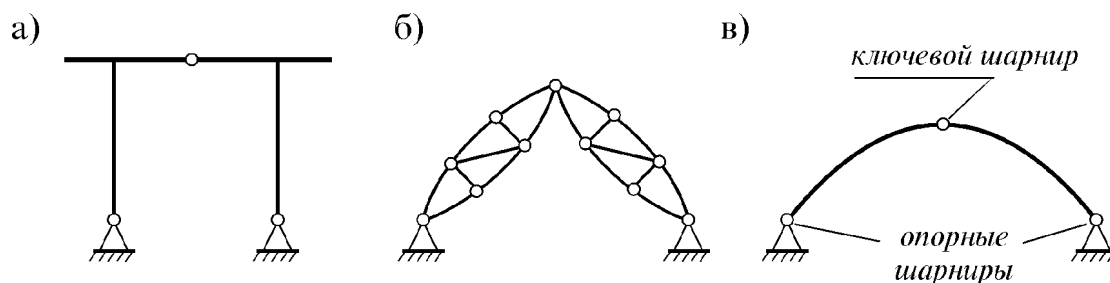


Рис. 5.5

Особенность трехшарнирных систем состоит в том, что в них возникает распор (боковое давление) даже от вертикальной нагрузки. Опорные реакции таких систем можно определять методом совместных сечений (рис. 5.6 а). В результате проведения двух сечений I-I и II-II появляются две независимые части с шестью неизвестными (четыре опорные реакции R_A , R_B , H_A , H_B и две междисковые реакции X_C , Y_C (рис. 5.6 б).

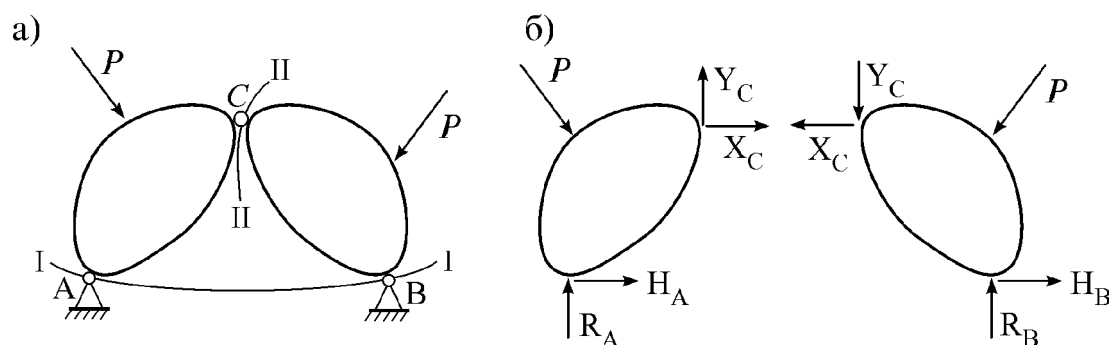


Рис. 5.6

Составив для каждого диска по три уравнения равновесия (всего шесть уравнений), можно определить все эти реакции. Далее каждый диск рассчитывается самостоятельно.

3. Расчет трехшарнирной арки

Рассмотрим расчет трехшарнирной арки произвольного очертания. При расчете арок назначаются несколько характерных сечений, определяемых делением пролета арки на несколько частей. К ним добавляются точки приложения нагрузок и расположения шарниров. Если известны длина пролета l и стрела подъема f параболической арки или радиус кривизны R круговой арки, необходимые для дальнейшего расчета геометрические параметры арки определяются путем вычислений. Если ось арки определяется другой кривой, то ее геометрические параметры

(координаты сечений x_i и y_i , углы наклона касательной к оси арки в этих точках ϕ_i , а также значения $\sin\phi_i$ и $\cos\phi_i$ должны быть известными.

При действии на арку только вертикальных сил, ее можно рассчитать и без расчленения на отдельные диски. Для этого следует сравнить арку (рис. 5.7 а) с вспомогательной балкой такого же пролета (рис. 5.7 б).

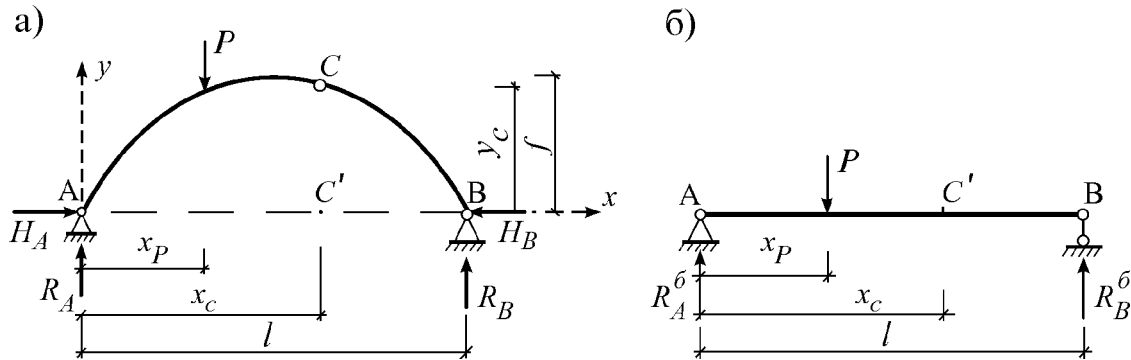


Рис. 5.7

Вначале составим уравнения моментов для обеих систем:

$$\begin{aligned} \text{для арки:} \quad \sum M_A &= R_B l - P x_P = 0; & \sum M_B &= -R_A l - P(l - x_P) = 0. \\ \text{для балки:} \quad \sum M_A &= R_B^b l - P x_P = 0; & \sum M_B &= -R_A^b l - P(l - x_P) = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая их между собой замечаем, что $R_B = R_B^b$, $R_A = R_A^b$.

Так как $\sum X = H_A - H_B = 0$, то $H_A = H_B = H$, где H – величина распора арки. Для ее определения вычислим момент сил слева от ключевого шарнира C

$$\sum M_C^{\text{лев}} = -R_A x_C + P(x_C - x_P) + H y_C = 0$$

и момент от левых сил балки в точке C

$$M_C^b = R_A x_C - P(x_C - x_P).$$

С учетом последнего выражения, уравнение для арки примет вид

$$M_C^b + H y_C = 0.$$

Отсюда получается формула для распора:

$$H = M_C^b / y_C.$$

Теперь определим внутренние усилия. Для этого применим метод сечений и для арки, и для балки, рассмотрев их левые части (рис. 5.8 а, б).

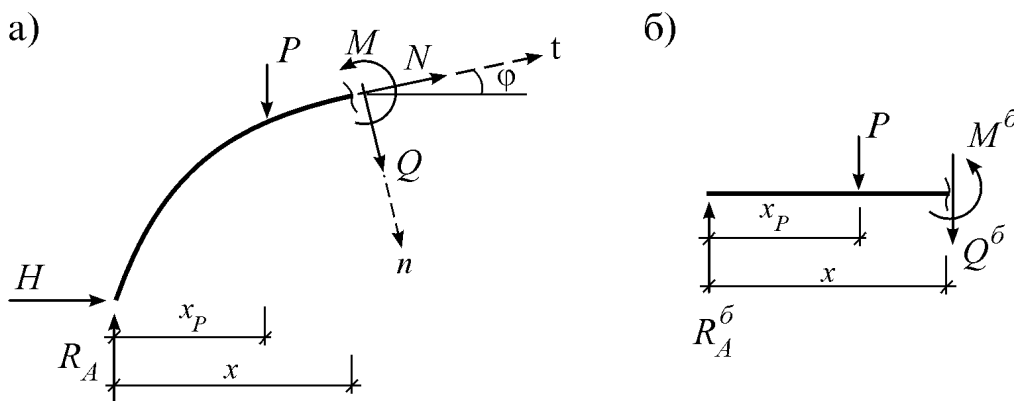


Рис. 5.8

Для арки:

$$M(x) = R_A x - P(x - x_P) - Hy(x).$$

Для балки:

$$M^0(x) = R_A x - P(x - x_P).$$

Заметим, что начальная часть формулы для арки совпадает с формулой для балки. Поэтому можно записать:

$$M(x) = M^0(x) - Hy(x).$$

Как видим, момент в арке меньше момента в балке.

Здесь следует отметить, что момент, растягивающий нижнее волокно арки, считается положительным.

Определим поперечные и продольные силы. Для этого спроецируем силы, указанные на рис. 5.8 а, на направления касательной t и нормали n в сечении:

$$\sum n = Q(x) + H \sin \phi + (P - R_A) \cos \phi = 0;$$

$$\sum t = N(x) + H \cos \phi + (R_A - P) \sin \phi = 0.$$

Так как в левой части балки (рис. 5.8 б) $Q^0(x) = R_A - P$, то из этих уравнений вытекают формулы:

$$Q(x) = Q^0(x) \cos \phi - H \sin \phi;$$

$$N(x) = -[Q^0(x) \sin \phi + H \cos \phi].$$

Если на арку кроме вертикальных сил действуют и горизонтальные силы, то в формулах для внутренних усилий вместо H следует учитывать сумму всех горизонтальных сил, лежащих слева от сечения.

Эпюры внутренних усилий M , Q , N арки строят в двух видах: или на оси арки, или на оси балки.

В о п р о с ы

1. Как строится этажная схема разрезной балки?
2. Чем отличаются арочная и подвесная системы?
3. В чем главная особенность трехшарнирных систем?
4. Как определяются распор и внутренние усилия в сечениях арки?
5. Как строятся эпюры внутренних усилий арки?

Л е к ц и я 6

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, таковой является транспорт, движущийся по мосту (рис. 6.1 а). Его можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рис. 6.1 б).

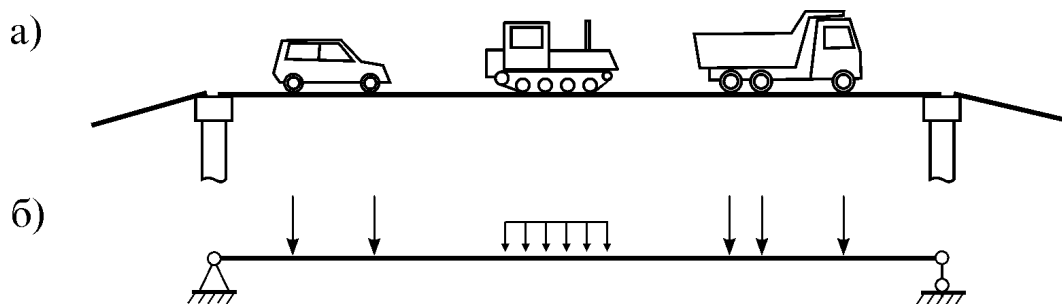


Рис. 6.1

1. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку

Подвижная нагрузка вызывает в элементах сооружения переменные внутренние усилия. Расчет сооружения на подвижную нагрузку, даже без учета динамических эффектов (например, ускорений и инерционных сил), сложнее расчета на постоянную нагрузку. Потому что приходится решать несколько задач:

- определять наиболее опасное (расчетное) положение нагрузки;
- определять наибольшее (расчетное) значение этой нагрузки;
- рассчитывать сооружение на расчетную нагрузку.

Расчет на подвижную нагрузку можно вести двумя методами.

Общий метод. Сущность метода:

- подвижная нагрузка рассматривается целиком и обозначается одной координатой;
- искомое внутреннее усилие выражается как функция координаты нагрузки; эта функция исследуется на экстремум и определяется расчетное положение нагрузки;
- затем вычисляется расчетное значение внутреннего усилия.

Этот метод универсален, но сложен для реализации.

Метод линий влияния. Сущность метода:

- искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от подвижной единичной силы;
- строится график этой функции;
- находятся расчетное положение и расчетное значение этой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации, позволяет достаточно просто определять расчетное положение нагрузки и ее величину. Поэтому остановимся на нем.

Линия влияния (ЛВ) – это график зависимости искомой величины от подвижной единичной силы $P=1$.

Понятия линии влияния и эпюры нельзя путать, потому что эпюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а линия влияния показывает значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы $P=1$ только для одного сечения.

2. Построение линий влияния усилий простой балки

Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка $P=1$ (рис. 6.2 а).

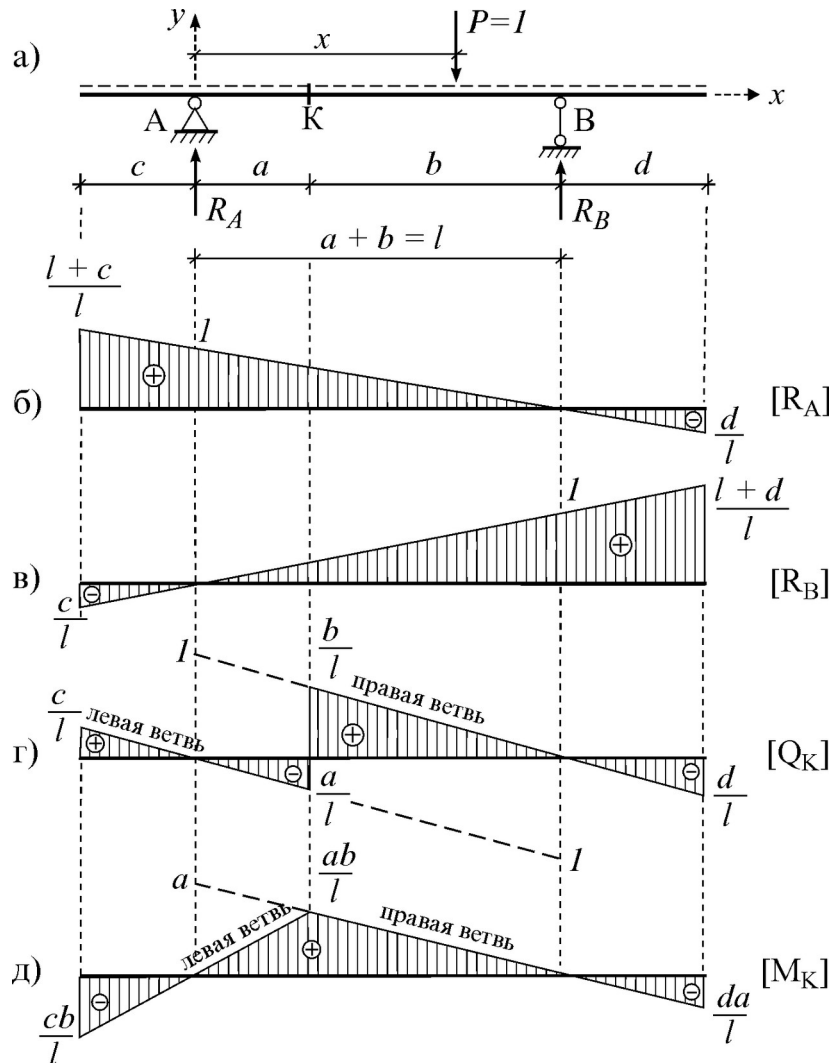


Рис. 6.2

1) Линии влияния опорных реакций

Сумма моментов в правой опоре:

$$\sum M_B = -R_A \cdot l + 1 \cdot (l - x) = 0.$$

Откуда $R_A = \frac{l-x}{l}$.

Для построения графика этой функции найдем положение двух точек:
если $x=0$, то $R_A=1$; если $x=l$, то $R_A=0$.

Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции R_A (рис. 6.2 б).

Для определения правой опорной реакции составим уравнение

$$\sum M_A = R_B \cdot l - 1 \cdot x = 0.$$

Отсюда $R_B = \frac{x}{l}$.

Если $x=0$, то $R_B=0$; если $x=l$, то $R_B=1$. Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции R_B (рис. 6.2 в).

2) Линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения сечения, в котором определяются.

а) Единичная сила правее сечения K

В этом случае $Q_K = R_A$, $M_K = R_A a$.

Эти функции определяют **правые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 6.2 г, д).

б) Единичная сила левее сечения K

В этом случае внутренние усилия легко выражаются через правую опорную реакцию: $Q_K = -R_B$, $M_K = R_B b$. Эти функции определяют **левые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 6.2 г, д).

Если сечение располагается на консольных (левой или правой) частях балки (рис. 6.3 а), ЛВ поперечной силы и момента будут совсем другими. Результаты их построения для двух сечений K_1 и K_2 даны на рис. 6.3 б-д.

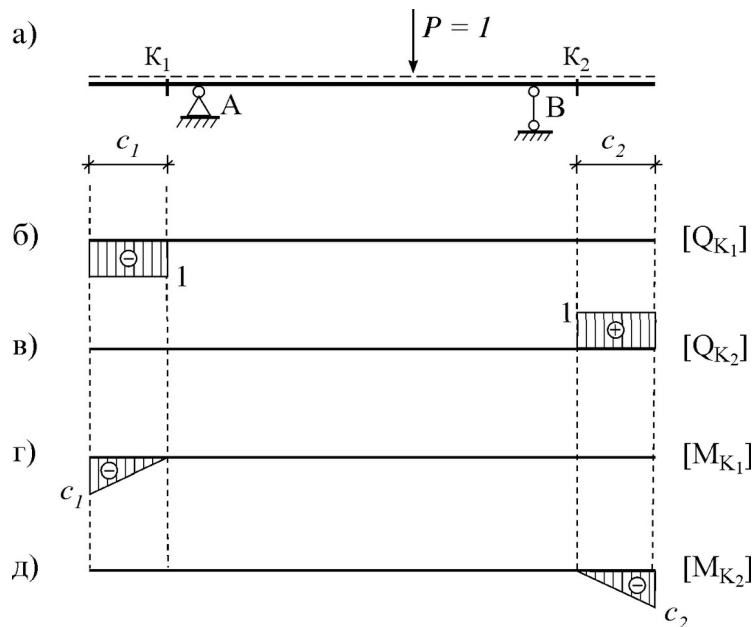


Рис. 6.3

В некоторых расчетных схемах (например, в этажных схемах разрезной балки) встречаются консоли с заделками справа или слева. ЛВ их усилий можно получить без расчетов, используя левые и правые части линий влияния на рис. 6.3 б-д, считая, что в точках A и B имеются заделки.

Полученные здесь ЛВ опорных реакций и внутренних усилий используются как известные решения при расчете аналогичных балок и как промежуточные решения при расчете многопролетных балок.

3. Построение линий влияния кинематическим методом

В основе кинематического метода лежит известный в теоретической механике **принцип возможных перемещений**: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо чтобы сумма работ всех сил на их возможных перемещениях равнялась нулю.

Рассмотрим применение этого метода на примере построения ЛВ опорной реакции R_B консольной балки (рис. 6.4 а). Для этого опоре B балки с единичной силой $P=1$ дадим малое перемещение δ_B в направлении реакции R_B (рис. 6.4 б). По принципу возможных перемещений, сумма работ всех сил балки на возможных перемещениях (рис. 6.4 б) равна нулю:

$$-1 \cdot \delta_P + \delta_B R_B = 0.$$

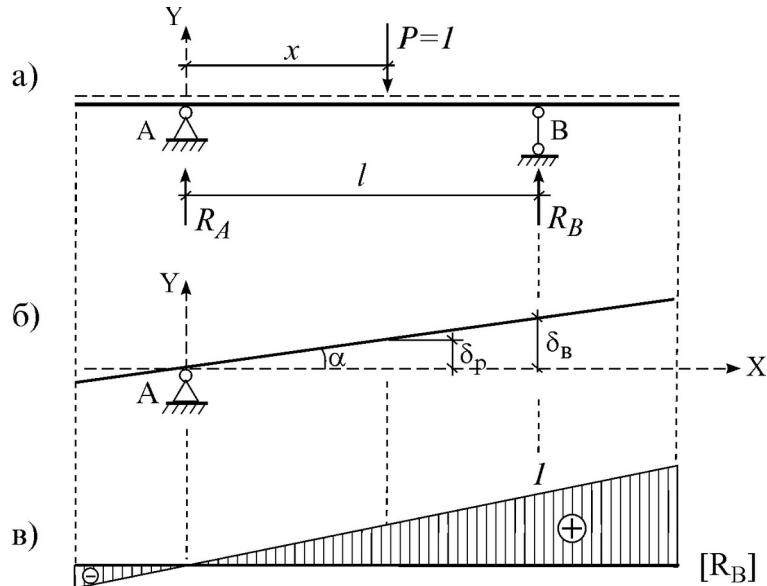


Рис. 6.4

По рис. 6.4 б имеем: $\delta_P = x \operatorname{tg} \alpha = x \frac{\delta_B}{l}$. С учетом этого предыдущая формула принимает вид $R_B = -\frac{x}{l}$, которая определяет искомую ЛВ R_B (рис. 6.4 в). Она совпадает с полученной ранее (рис. 6.2 в).

Кинематический метод, как более сложный статического метода (в нем надо вычислять перемещения), обычно используется лишь для проверки общего вида ЛВ, полученного статическим методом.

Например, для получения общего вида линии влияния Q_K консольной балки на рис. 6.2 а удаляем связь в точке K и образуем механизм (рис. 6.5 а) с одной степенью свободы. Задавая малые перемещения в направлении Q_K слева и справа от сечения, строим новое положение балки, которое и покажет общий вид ЛВ Q_K (рис. 6.5 б). Аналогично поступаем и при получении общего вида ЛВ M_K (рис. 6.5 в, г).

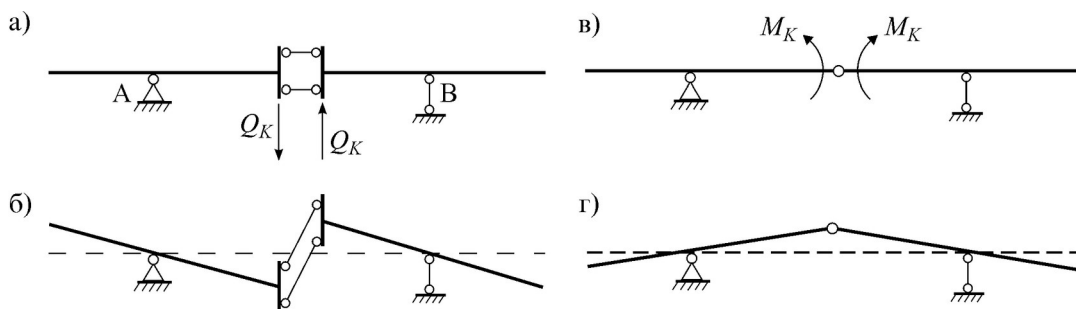


Рис. 6.5

4. Построение ЛВ при узловой передаче нагрузки

В некоторых сооружениях нагрузка на их несущую часть может передаваться через вспомогательные балки. Например, такая конструктивная схема часто используется в мостах: там на главную балку накладываются поперечные балки, а на них – настил (рис. 6.6 а). В таких сооружениях нагрузка на главные балки передается через узлы пересечения главной балки с поперечными балками.

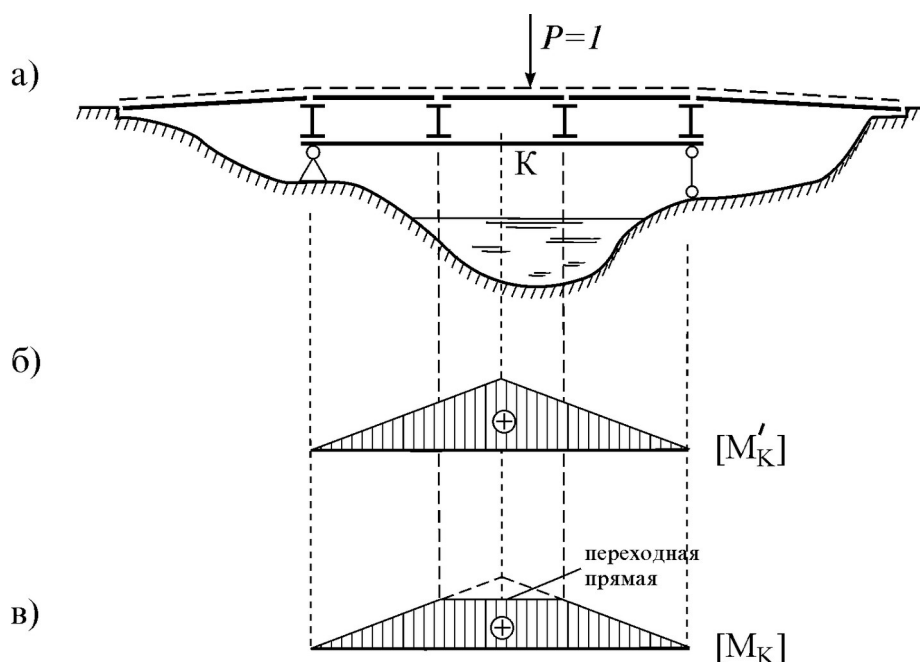


Рис. 6.6

Если бы нагрузка действовала только на главную балку, ЛВ M_K была бы как на рис. 6.6 б. Поэтому, когда единичная сила находится над поперечными балками, ординаты ЛВ будут такими же. Если же единичная сила будет между поперечными балками, ЛВ сглаживается (рис. 6.6 в).

5. Определение усилий по ЛВ

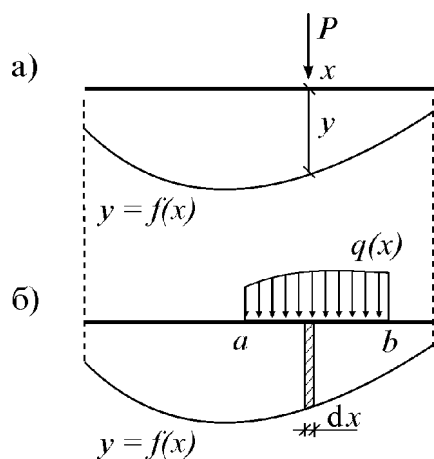


Рис. 6.7

Пусть ЛВ какого-то усилия S определяется уравнением $y=f(x)$. По ее графику можно определять усилие S от произвольной нагрузки.

а) Действие сосредоточенной силы (рис. 6.7 а). Если система упругая, то внутреннее усилие прямо пропорционально нагрузке. Поэтому $S=Py$. Когда же действуют несколько сил P_i , то внутреннее усилие определится по принципу суперпозиции:

$$S = \sum P_i y_i .$$

б) Действие распределенной нагрузки (рис. 6.7 б). Если рассматривать элементарную силу $q(x)dx$ как сосредоточенную силу, то

$$S = \int_a^b q(x) y dx .$$

Когда же распределенная нагрузка постоянна, т.е. $q(x)=q=const$, то

$$S = q \int_a^b y dx = q \omega .$$

Здесь ω – площадь ЛВ в области действия распределенной нагрузки.

Если на сооружение действует несколько сил и распределенных нагрузок, по принципу суперпозиции получаем

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_j \omega_j .$$

В о п р о с ы

1. Что такое линия влияния и чем она отличается от эпюры?
2. Как выглядят линии влияния опорных реакций консольной балки?
3. Как получить общий вид линии влияния кинематическим методом?
4. Чем отличается ЛВ при узловой передаче нагрузки?
5. Как по линии влияния определяется усилие от постоянной нагрузки?

Л е к ц и я 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ (продолжение)

6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки

При расчете сооружений на подвижную нагрузку часто требуется определять наибольшее значение внутреннего усилия, которое достигается в некотором положении этой нагрузки, называемом **невыгоднейшим (критическим)** положением. Однако решение такой задачи связано с поиском экстремума функции от многих параметров. Поэтому рассмотрим лишь достаточно простой случай движения связанных сосредоточенных грузов (рис. 7.1 а), когда ЛВ усилия имеет вид треугольника (рис. 7.1 б).

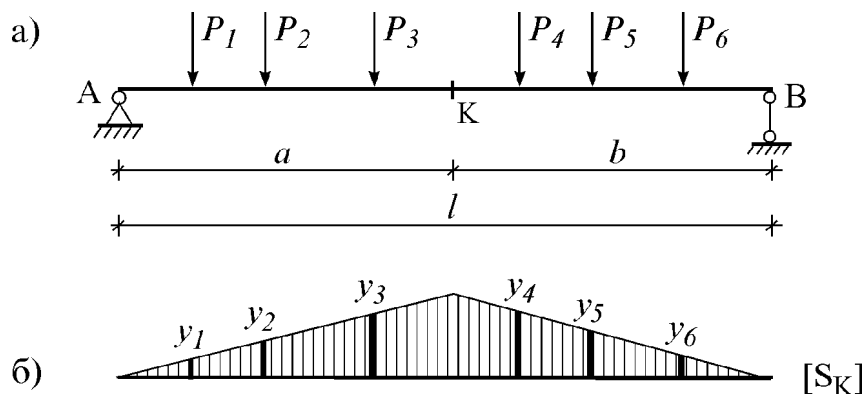


Рис. 7.1

Невыгоднейшее положение такой нагрузки определяется поочередной подстановкой сил в сечение K и проверкой выполнения двух неравенств

$$(R_{лев} P_{кр}) / a \quad R_{пр} / b; \quad R_{лев} / a \quad (P_{кр} R_{пр}) / b .$$

Здесь $R_{лев}$ и $R_{пр}$ – равнодействующие сил, расположенных левее и правее от сечения K , $P_{кр}$ – критическая сила, установленная в сечении K (в вершину ЛВ).

7. Понятие о матрице влияния

Матричная форма представления данных является эффективной на разных этапах расчета сооружений. Так, при расчете на многовариантное воздействие нагрузки, полезно вводить матрицу влияния, элементами которой являются ординаты линий влияния. Матрица влияния позволяет определять внутренние силы сразу в нескольких сечениях.

Например, для построения матрицы влияния изгибающих моментов балки, имеющей n сечений (рис. 7.2 а), необходимо иметь n линий влияния моментов $[M_1], [M_2], \dots, [M_n]$ с известными ординатами y_{ij} (рис. 7.2 б, в, г). Здесь i – номер ЛВ, j – номер сечения.

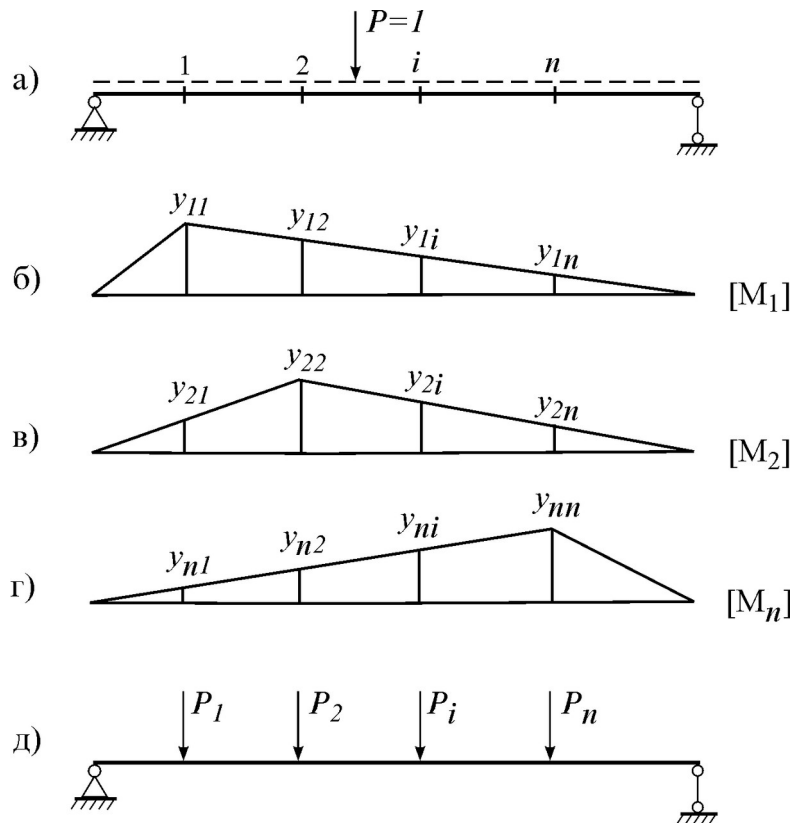


Рис. 7.2

Объединяя ординаты в единую матрицу, получаем матрицу влияния

$$\mathbf{L}_M = \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{matrix} .$$

Она позволяет определять моменты во всех сечениях балки по формуле

$$M_1 \quad M_2 \quad \square \quad M_n \quad LMP,$$

где $\mathbf{P} = P_1 \quad P_2 \quad \square \quad P_n$ – вектор действующих на балку n сил P_1, P_2, \dots, P_n

(рис. 7.2 д).

8. Построение ЛВ усилий фермы

Рассмотрим ферму (рис. 7.3 а). При воздействии только вертикальной нагрузки, ее опорные реакции будут такими же как у вспомогательной балки (рис. 7.3 б). Поэтому ЛВ опорных реакций фермы будут аналогичны ЛВ балки (рис. 7.3 в, г).

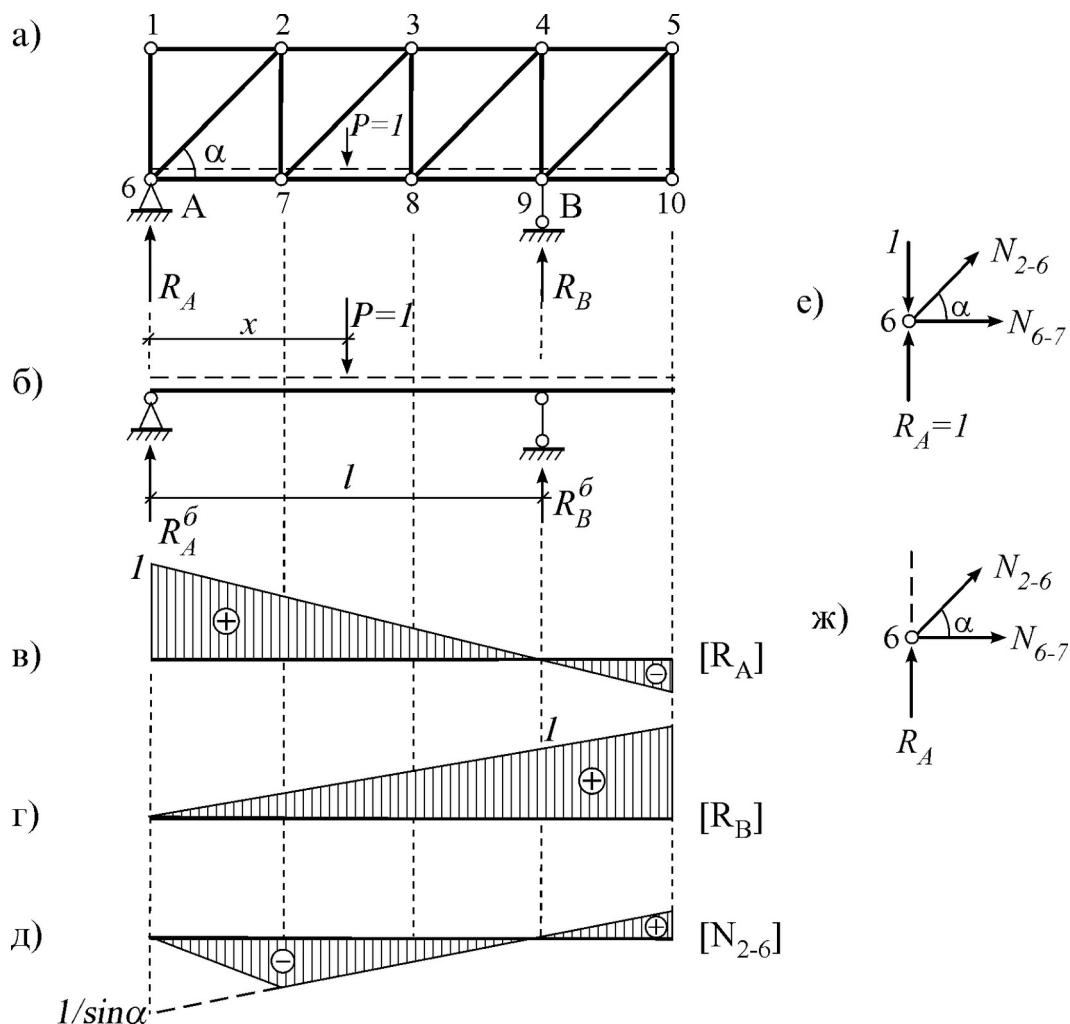


Рис. 7.3

При построении ЛВ продольных усилий фермы воспользуемся методами вырезания узлов и сквозных сечений.

а) Использование метода вырезания узлов

Для построения ЛВ N_{2-6} вначале рассмотрим узел 1. Так как к нему силы не приложены, то по признаку 1 (стр. 25) $N_{1-6}=0$.

После этого вырежем узел 6 фермы. Здесь могут быть два случая:
 1) когда единичная сила $P=1$ находится в этом узле (рис. 7.3 е), то

$$\sum Y = N_{2-6} \sin \alpha + 1 - 1 = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = 0.$$

2) когда единичная сила $P=1$ находится вне этого узла (рис. 7.3 ж), то

$$\sum Y = N_{2-6} \sin \alpha + R_A = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = -\frac{1}{\sin \alpha} R_A.$$

Тогда, используя ЛВ опорной реакции R_A , можно построить ЛВ усилия N_{2-6} (рис. 7.3 д).

б) Использование метода сквозных сечений

Поперек фермы проведем сквозное сечение I-I (рис. 7.4 а) и получим независимые левые и правые части. Единичная сила $P=1$ может находиться в обеих частях фермы.

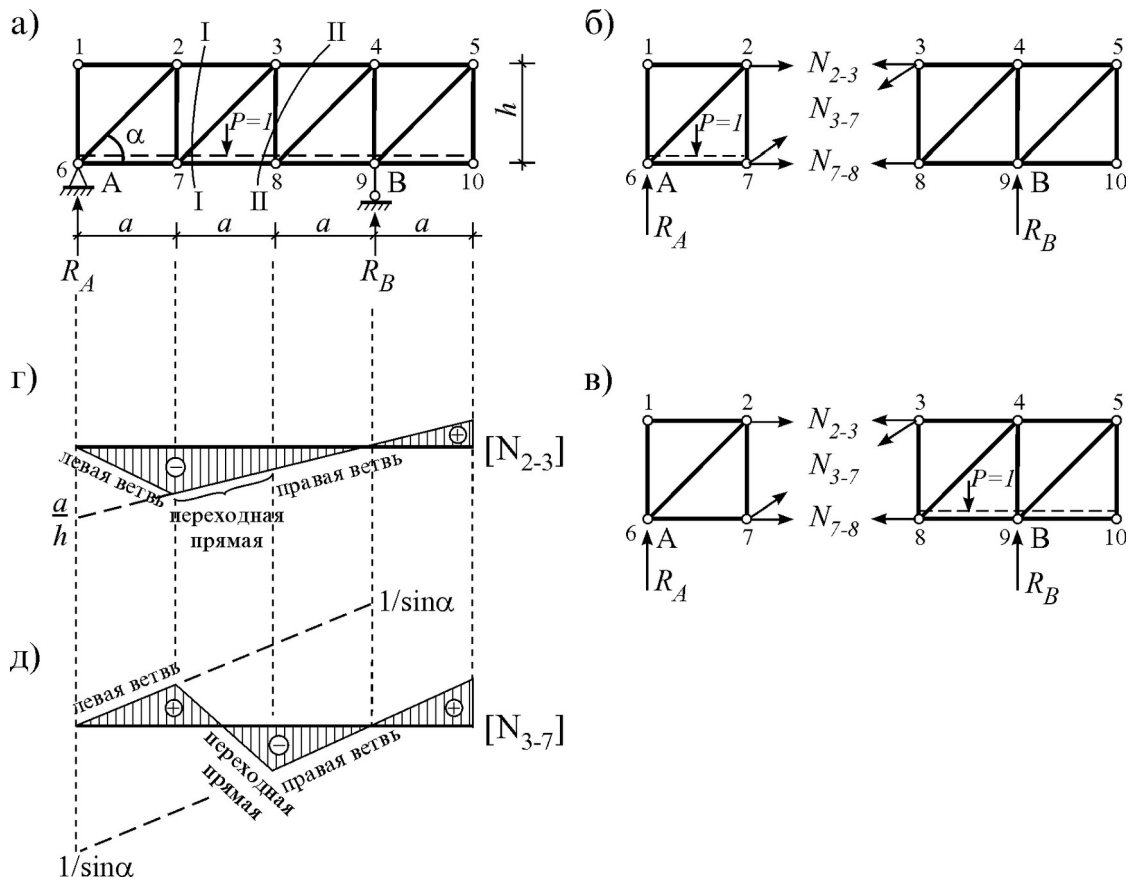


Рис. 7.4

1) Единичная сила левее сечения (рис. 7.4 б):

$$\sum M^{np} = N_{2-3} h + R_B 2a = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_{2-3} = -\frac{2a}{h} R_B;$$

$$\sum Y^{np} = -N_{3-7} \sin \alpha + R_B = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_{3-7} = \frac{1}{\sin \alpha} R_B.$$

2) Единичная сила правее сечения (рис. 7.4 в):

$$\sum M^{лев} = -N_{2-3} h - R_A a = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_{2-3} = -\frac{a}{h} R_A;$$

$$\sum Y^{лев} = N_{3-7} \sin \alpha + R_A = 0.$$

$$\text{Отсюда } N_{3-7} = -\frac{1}{\sin \alpha} R_A.$$

В первом случае определяются ординаты ЛВ этих усилий между узлами 6-7, т.е. определяются их левые ветви, а во втором случае определяются ординаты обеих ЛВ между узлами 8-10, т.е. правые ветви ЛВ. Соединив точки между узлами 7-8, получаем переходную прямую и окончательный вид ЛВ (рис. 7.4 г, д).

Как видно из этих примеров, у ЛВ продольных усилий фермы есть следующие свойства: *ветви ЛВ пересекаются под моментной точкой; если же моментной точки нет, ветви ЛВ параллельны.*

В о п р о с ы

1. Что такое невыгоднейшее положение нагрузки?
2. Что такое матрица влияния и для чего она применяется?
3. Какие способы используются при построении ЛВ усилий фермы?

Л е к ц и я 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Понятие о перемещениях

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружение меняет свою форму, а его точки получают перемещения.

Перемещение – векторная величина. Перемещение любой точки на плоскости можно задать через его модуль и направление. Например, вектор перемещения AA Δ_A точки A рамы в точку A' (рис. 8.1 а) определяется через его модуль Δ_A и угол (направление) ϕ_A (рис. 8.1 б). А эти величины можно определять через горизонтальную и вертикальную составляющие Δx_A и Δy_A вектора перемещения Δ_A :

$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2}, \quad \phi_A = \arctg \frac{\Delta y_A}{\Delta x_A}.$$

Поступательные перемещения Δ_A , Δx_A , Δy_A будем называть **линейными перемещениями**, а ϕ_A – **угловым перемещением**.

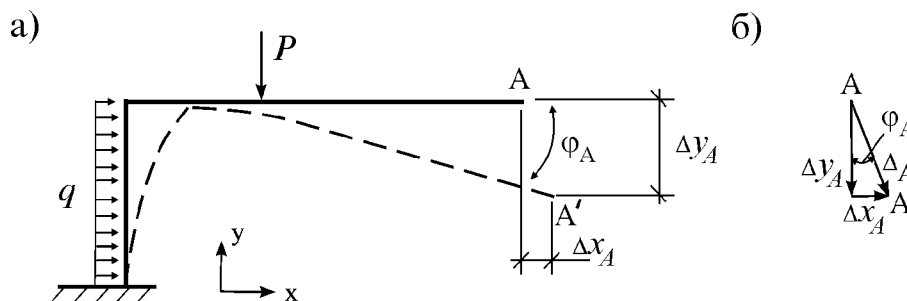


Рис. 8.1

Методы определения перемещений основаны на определении работ внешних и внутренних сил. В механике рассматриваются два вида таких работ – действительные и возможные работы.

2. Действительные работы внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия

Действительным перемещением называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия (рис. 8.2 а). В упругих системах перемещение Δ прямо пропорционально действующей силе и выполняется закон Гука

$$\Delta = \delta P,$$

где коэффициент δ называется **податливостью**.

Эта зависимость представляется в виде диаграммы $\Delta - P$ (рис. 8.2 б).

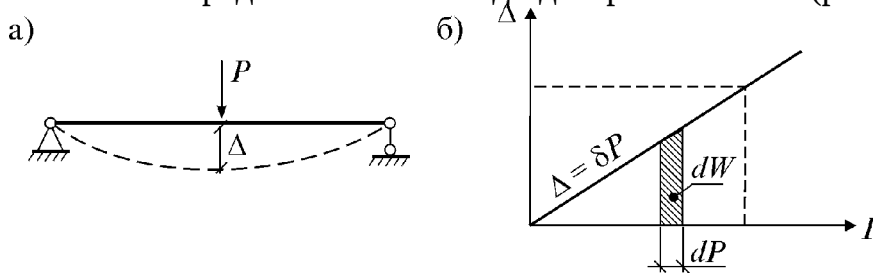


Рис. 8.2

Действительной работой называется работа силы на ее действительном перемещении.

Действительную работу силы P можно найти по рис. 8.2 б:

$$W = \int_0^P dW = \frac{1}{2} P \Delta.$$

Эта формула определяет **теорему Клапейрона**: *сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на ее перемещение.*

Используя закон Гука, получаем

$$W = \frac{1}{2} \delta P^2 \geq 0.$$

Из формулы следует, что *внешняя сила совершает положительную работу.*

Если на систему действуют несколько сил, по принципу суперпозиции

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_{Pk}.$$

В идеально-упругой системе предполагается, что работа внешних сил W полностью переходит в потенциальную энергию деформации U :

$$W = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы. Так как работа внешних сил W всегда положительна, то работа внутренних сил V будет отрицательной:

$$W = -V.$$

Теперь вычислим работу внутренних сил стержневой системы.

а) Работа продольной силы N

Пара продольных сил N , действующих на элемент dx , приводит к его чистому растяжению (рис. 8.3 а).

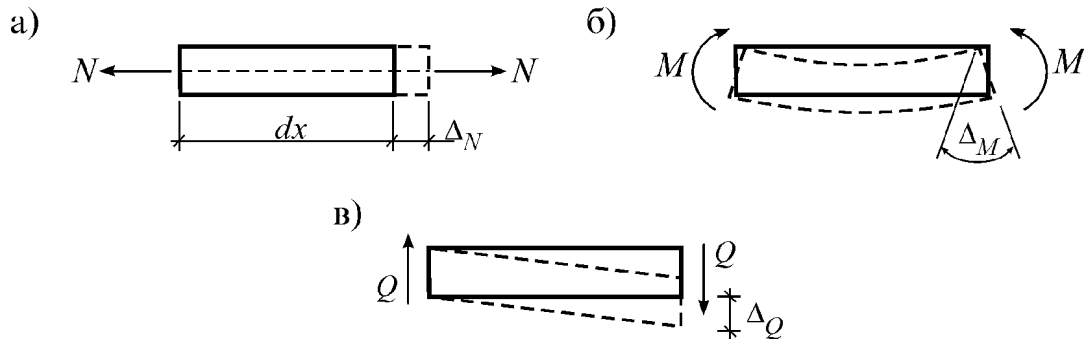


Рис. 8.3

По теореме Клапейрона эти силы на общей деформации элемента (действительном перемещении) Δ_N совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N.$$

С учетом закона Гука при растяжении $\Delta_N = \frac{Ndx}{EF}$, получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF} dx,$$

где E – модуль Юнга, F – площадь сечения, EF – жесткость на растяжение.

б) Работа изгибающего момента M

Пара изгибающих моментов M , действующих на элемент dx , приводит к его чистому изгибу (рис. 8.3 б). На общей деформации Δ_M эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M.$$

По закону Гука при изгибе $\Delta_M = \frac{Mdx}{EI}$. Поэтому

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

где I – момент инерции сечения, EI – жесткость на изгиб.

в) Работа поперечной силы Q

Действие пары поперечных сил Q приводит к чистому сдвигу элемента dx (рис. 8.3 в). На общей деформации Δ_Q они совершают работу:

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q.$$

По закону Гука $\Delta_Q = \mu \frac{Qdx}{GF}$. Поэтому

$$-dV_Q = \mu \frac{Q^2}{2GF} dx,$$

где μ – коэффициент формы сечения, GF – жесткость на сдвиг.

Теперь воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \mu \frac{Q^2}{GF} \frac{N^2}{EF} dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим выражение потенциальной энергии всей стержневой системы:

$$U = -V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{M^2}{EI} \mu \frac{Q^2}{GF} \frac{N^2}{EF} dx.$$

3. Возможные перемещения. Возможные работы внешних и внутренних сил

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется **возможным перемещением**. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется **возможной работой**. Возможное перемещение обозначим Δ_{ij} , а возможную работу W_{ij} (здесь i означает направление, а j – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила P_i , а затем в другой точке начнет действовать другая сила P_j , то балка в точке действия силы P_i получит возможное перемещение Δ_{ij} (рис. 8.4 а). Так как в это время сила P_i остается постоянной, совершаемая ею возможная работа определяется площадью прямоугольника (рис. 8.4 б):

$$W_{ij} = P_i \Delta_{ij}.$$

Таким образом, *возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение*.

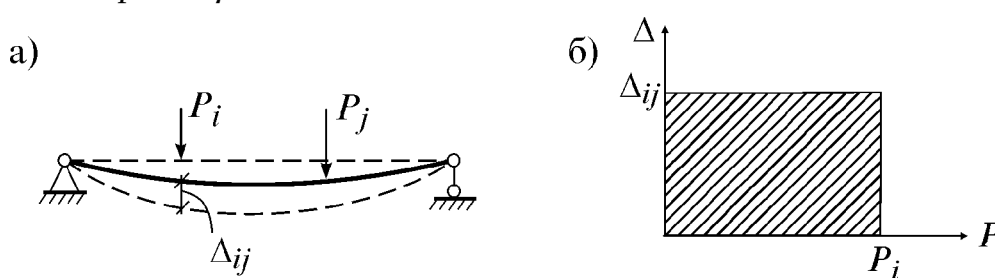


Рис. 8.4

При определении возможной работы следует рассматривать два состояния системы: в одном из них действуют заданные, а во втором – возможные силы.

Теорема Бетти. *Возможная работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна возможной работе сил j -го состояния на перемещениях i -го состояния.*

Доказательство. Пусть на систему воздействуют силы P_i и P_j . Приложим их в разной последовательности и рассмотрим два состояния:

- 1) прикладывается сила P_i , затем сила P_j (рис. 8.5 а);

2) прикладывается сила P_j , затем сила P_i (рис. 8.5 б).

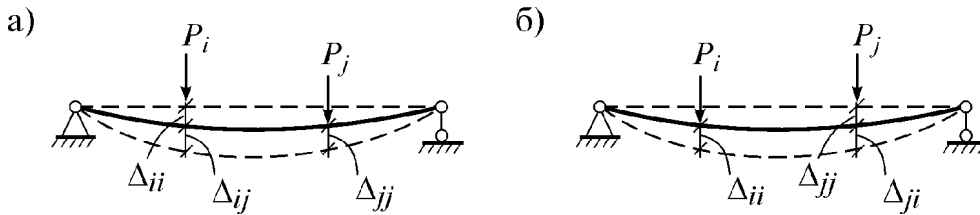


Рис. 8.5

В этих состояниях силы на действительных перемещениях совершают действительные, а на возможных перемещениях – возможные работы. Выражения работ в обоих состояниях будут:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + P_i \Delta_{ij}; \quad W_{ji} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_j \Delta_{ji}.$$

На основании принципа суперпозиции, результат воздействия этих сил не зависит от порядка их приложения. Следовательно, обе работы равны: $W_{ij} = W_{ji}$. Отсюда получаем

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Теорема доказана. Ее часто называют **теоремой о взаимности работ**.

Теперь определим возможную работу внутренних сил. Для этого рассмотрим два состояния системы:

1) действует сила P_i и вызывает внутренние усилия M_i, Q_i, N_i ;

2) действует сила P_j , которая в пределах малого элемента dx вызывает возможные деформации

$$\Delta_{Mj} = \frac{M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{Qj} = \mu \frac{Q_j}{GF} dx, \quad \Delta_{Nj} = \frac{N_j}{EF} dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на деформациях (возможных перемещениях) второго состояния совершают возможную работу

$$-dV = M \Delta_{ij} + Q \Delta_{ij} + N \Delta_{ij} = \frac{M_i M_j}{EI} dx + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} dx + \frac{N_i N_j}{EF} dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим формулу возможной работы внутренних сил:

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{lk} \frac{M_i M_j}{EI} + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} + \frac{N_i N_j}{EF} dx.$$

Вопросы

1. Чему равняется действительная работа плоской стержневой системы?
2. В чем состоит теорема Клапейрона?
3. Как определяется потенциальная энергия стержневой системы?
4. Что такое возможное перемещение?
5. Как формулируется теорема Бетти?
6. Какие состояния рассматриваются при определении перемещений?
7. Как определяются перемещения в рамах и фермах?

Лекция 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

4. Интеграл Мора

Рассмотрим два состояния стержневой системы:

1) **грузовое состояние** (рис. 9.1 а), в котором действующая нагрузка вызывает внутренние усилия M_P, Q_P, N_P ;

2) **единичное состояние** (рис. 9.1 б), в котором действующая единичная сила $P=1$ вызывает внутренние усилия $\overline{M}, \overline{Q}, \overline{N}$.

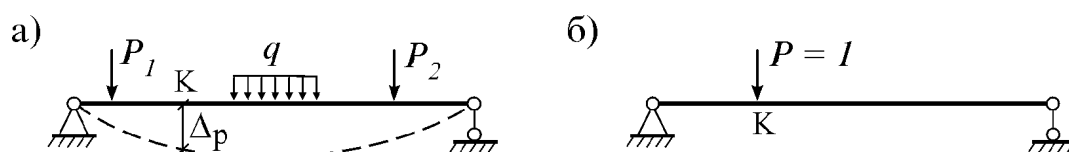


Рис. 9.1

Внутренние силы грузового состояния на деформациях единичного состояния $\frac{M}{EI} dx, \frac{Q}{EI} dx, \frac{N}{EI} dx$ совершают возможную работу

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{M_P M}{EI} + \mu \frac{Q_P Q}{GF} + \frac{N_P N}{EF} dx.$$

А единичная сила $P=1$ единичного состояния на перемещении грузового состояния Δ_P совершает возможную работу

$$W_{ij} = 1 \cdot \Delta_P = \Delta_P.$$

По известному из теоретической механики принципу возможных перемещений, в упругих системах эти работы должны быть равными, т.е. $W_{ij} = -V_{ij}$. Значит, должны быть равны и правые части этих выражений:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \frac{M_P M}{EI} + \mu \frac{Q_P Q}{GF} + \frac{N_P N}{EF} dx.$$

Эта формула называется **формулой Мора** и используется для определения перемещений стержневой системы от силовой нагрузки.

5. Частные случаи применения формулы Мора

Во многих случаях вместо полной формулы Мора можно использовать ее сокращенные варианты. Это позволяет, без допущения больших погрешностей, существенно сократить объем вычислений.

1. **В балках** (рис. 9.2 а) возможны три случая:

– если $\frac{l}{h} > 8$, в формуле оставляется только слагаемое с моментами:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_k M_k}{EI} dx;$$

– если $5 \leq \frac{l}{h} \leq 8$, учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_k M_k}{EI} + \mu \frac{Q_k Q_k}{GF} dx;$$

– если $\frac{l}{h} < 5$, формула Мора дает большие погрешности. В этом случае перемещения следует определять методами теории упругости.

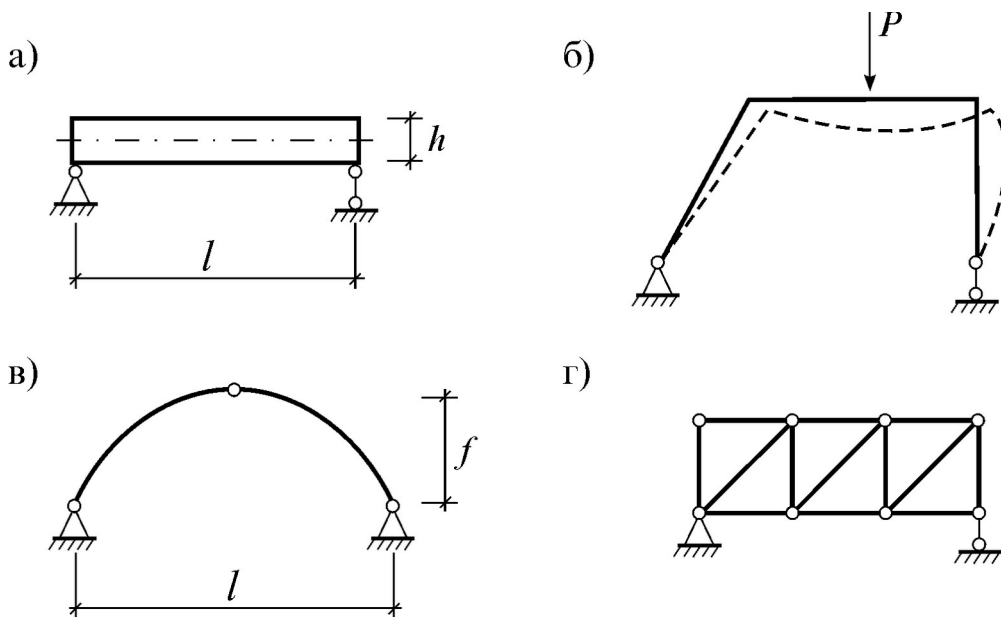


Рис. 9.2

2. **В рамах** (рис. 9.2 б) элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты.

В высоких рамах учитывается и продольная сила:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_k M_k}{EI} + \frac{P}{EF} dx.$$

3. **В арках** (рис. 9.2 в) необходимо учитывать соотношение между основными размерами арки – длиной пролета l и стрелой подъема f :

1) если $\frac{l}{f} \leq 5$ (крутая арка), учитываются только моменты;

2) если $\frac{l}{f} > 5$ (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы.

4. **В фермах** (рис. 9.2 г) возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{N_k N_k}{EF} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_k N_k}{EF} l_k = \sum_{k=1}^n \frac{N_k^2}{EF_k} l_k.$$

6. Определение перемещений от температуры

Изменение температуры по сравнению с некоторой начальной приводит к тому, что элементы сооружения деформируются и ее точки получают перемещения. Для определения этих перемещений будем пользоваться принципом возможных перемещений.

Рассмотрим простейший элемент – шарнирную балку, температуры верхней и нижней волокон которой изменяются на t_1 и t_2 (рис. 9.3 а). Возникающее при этом температурное перемещение Δ_t по направлению единичной силы $P=1$ совершает возможную работу

$$W_{ij} = 1 \cdot \Delta_t = \Delta_t.$$

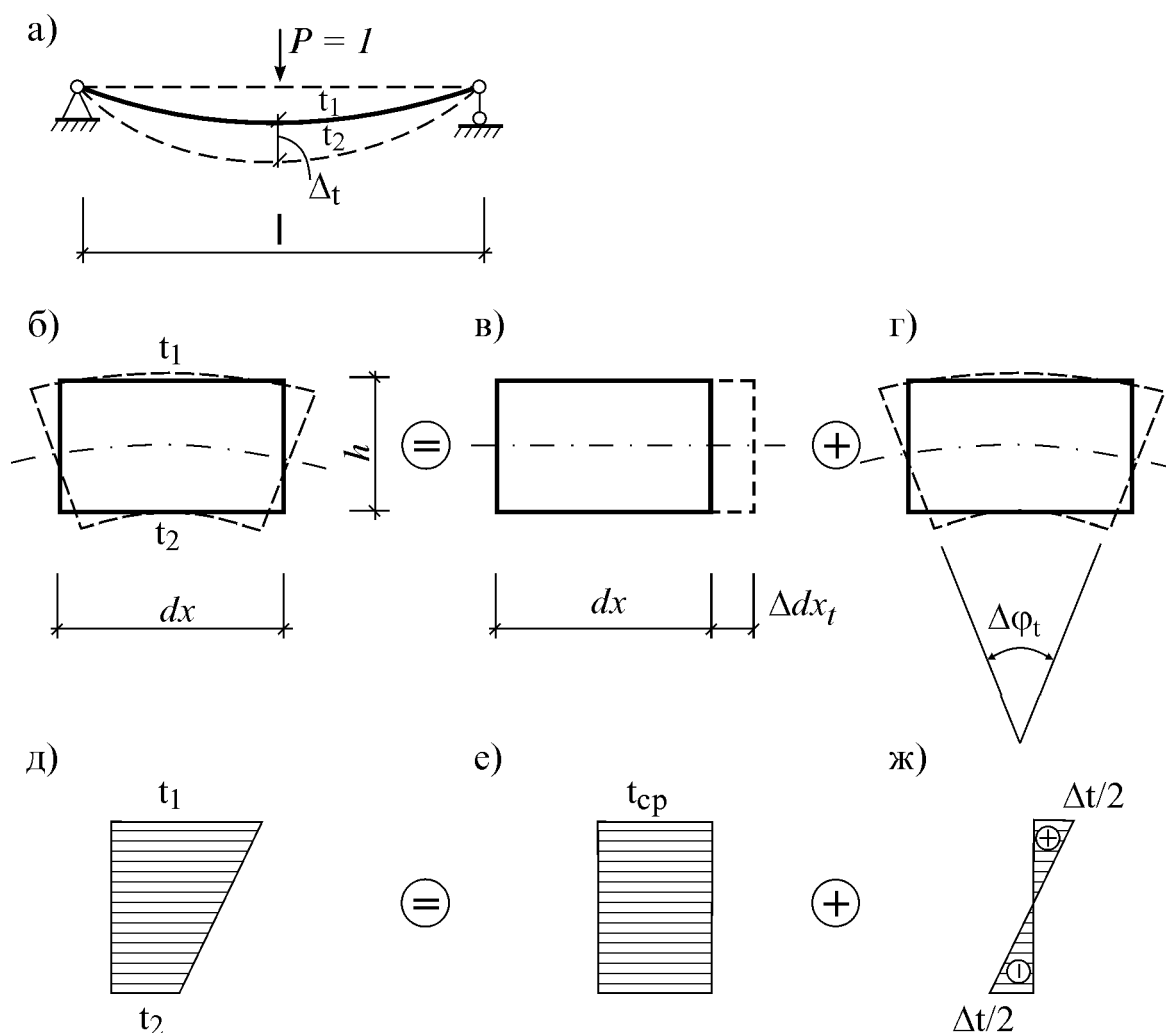


Рис. 9.3

Для определения возможной работы внутренних сил рассмотрим малый элемент длиной dx (рис. 9.3 б), предполагая, что температура внутри него изменяется по линейному закону (рис. 9.3 д).

Представим это температурное состояние как сумму двух состояний:

1) равномерный нагрев (рис. 9.3 в), когда оба волокна нагреваются на среднюю температуру $t_{cp} = (t_1 + t_2) / 2$ (рис. 9.3 е);

2) неравномерный нагрев (рис. 9.3 г), когда одно (верхнее) волокно нагревается на температуру $\Delta t/2$, а второе (нижнее) охлаждается на эту же температуру (рис. 9.3 ж), где $\Delta t = t_1 - t_2$ – разность температур, а $t_1 > t_2$.

В результате этого деформация элемента dx может быть представлена как сумма двух деформаций:

1) чистого растяжения от нагрева на t_{cp} ;

2) чистого изгиба от одновременного нагрева и охлаждения верхнего и нижнего волокон на температуру $\Delta t/2$.

Первая деформация приводит к растяжению элемента dx на величину

$\Delta dx_t = \alpha t_{cp} dx$, а вторая – повороту концевых сечений элемента на общий угол $\Delta \phi_t = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t}{h} dx$. Здесь α – коэффициент линейного расширения

материала, h – высота сечения (рис. 9.3 б).

Усилия, возникающие в единичном состоянии \bar{M} , \bar{Q} , \bar{N} , на этих деформациях Δdx_t и $\Delta \phi_t$ совершат возможную работу:

$$-V_{ij} = \int_0^l N \Delta dx_t + \int_0^l M \Delta \phi_t = \int_0^l N \alpha t_{cp} dx + \int_0^l M \alpha \frac{\Delta t}{h} dx = \alpha \int_0^l t_{cp} N dx + \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^l M dx .$$

Величины интегралов в этом выражении равняются площадям эпюр \bar{N} и \bar{M} в пределах данного элемента $\Omega_{\bar{N}}$ и $\Omega_{\bar{M}}$. Поэтому

$$-V_{ij} = \alpha \int_0^l t_{cp} N dx + \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^l M dx .$$

На основании принципа возможных перемещений, возможные работы внешних и внутренних сил равны. Отсюда получаем

$$\Delta_t = \alpha \int_0^l t_{cp} N dx + \alpha \frac{\Delta t}{h} \int_0^l M dx .$$

Если в сооружении имеется n стержней (или участков), полное перемещение от воздействия температуры на всю систему будет равно сумме перемещений от вклада каждого стержня:

$$\Delta_t = \alpha \sum_k \int_0^{l_k} t_{cp,k} N_k dx_k + \alpha \sum_k \frac{\Delta t_k}{h_k} \int_0^{l_k} M_k dx_k .$$

Каждое слагаемое в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения деформаций единичного и температурного состояний. Например, если и в единичном, и в температурном состояниях стержень растягивается, первое слагаемое берется со знаком «+». Если в одном состоянии стержень растягивается, а в другом сжимается, оно берется со знаком «-». Знак второго слагаемого определяется аналогично. Только в этом случае учитывается совпадение или несовпадение растянутых волокон двух состояний.

7. Определение перемещений от смещения опор

При смещении опор статически определимой системы внутренние силы и деформации в ее элементах не возникают, однако точки системы получают некоторые перемещения.

Порядок вычисления таких перемещений изучим на примере рамы, опора которой смещается на величину c (рис. 9.4 а). При этом точка A принимает новое положение A' . Определим вертикальное перемещение этой точки, обозначенное как Δ_c .

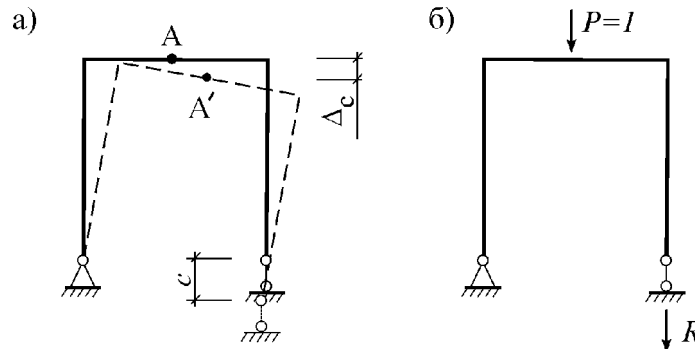


Рис. 9.4

Для этого рассмотрим единичное состояние рамы, приложив в точке A единичную силу (рис. 9.4 б), и вычислим две возможные работы:

- 1) работа сил первого состояния на перемещениях второго $W_{12}=0$ (т.к. в первом состоянии внутренние силы не возникают);
- 2) работа сил второго состояния на перемещениях первого состояния равна $W_{21}=1 \cdot \Delta_c + Rc$.

По теореме Бетти должно быть $W_{12} = W_{21}$. Отсюда получаем формулу

$$\Delta_c = -Rc.$$

Если смещение будет по нескольким направлениям, то по принципу суперпозиции имеем

$$\Delta_c = \sum_{k=1}^n R_k c_k.$$

Каждое произведение $R_k c_k$ в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения направлений реакции и смещения опоры.

В о п р о с ы

1. Из каких слагаемых состоит интеграл Мора?
2. Какие слагаемые формулы Мора учитываются при расчете рам?
3. Чем заменяется интеграл Мора при расчете ферм?
4. На какие два состояния разбивается температурное состояние при определении температурных перемещений?
5. Как записывается формула вычисления перемещения от смещения опор?
6. Как учитываются знаки слагаемых в формуле определения перемещения от осадки опор?

Лекция 10

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1. Понятие о статически неопределимых системах

Статически неопределимой называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики (равновесия). Статически неопределимые системы (СНС) отличаются от статически определимых рядом свойств:

1. Они надежнее, разрушение некоторых элементов не всегда приводит к разрушению всей системы.
2. Они выдерживают большую нагрузку.
3. У них деформации меньше.
4. Изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия.
5. Внутренние усилия зависят от физических и геометрических характеристик элементов.

У статически неопределимых систем есть так называемые «лишние» связи, число которых называется **степенью статической неопределимости**. Степень статической неопределимости простой системы определяется из дискового аналога по следующей формуле:

$$n = W - 2n_{ш} + n_c + n_{c_0} - 3n_d.$$

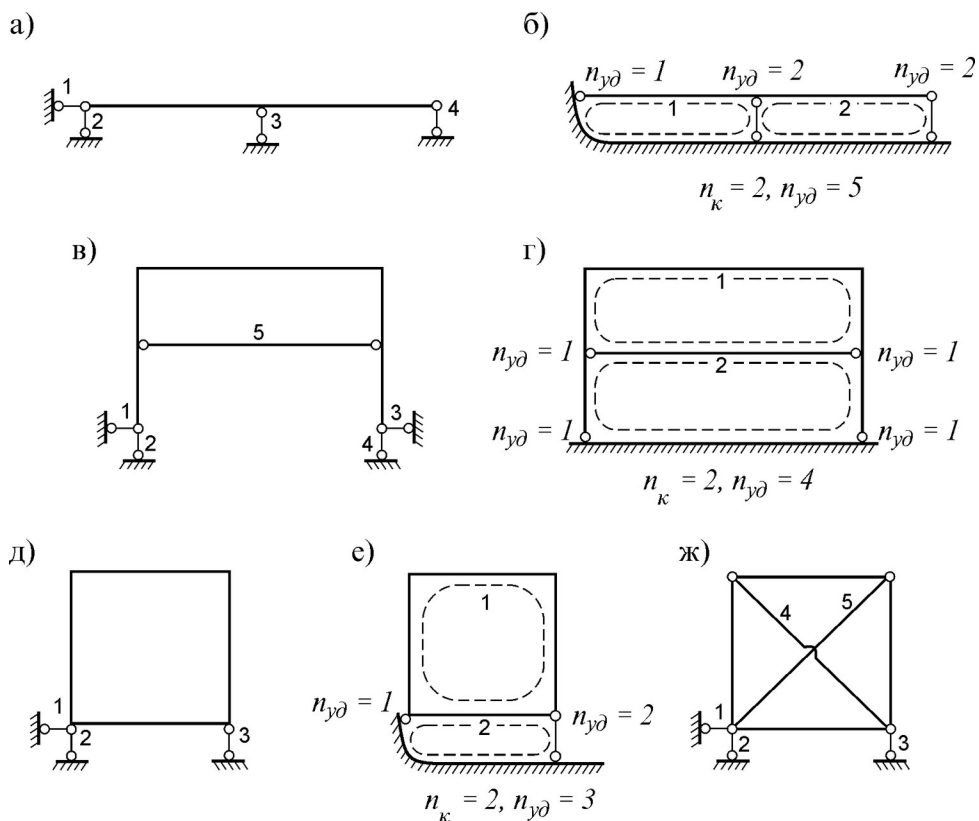


Рис. 10.1

Например, степени статической неопределимости балки (рис. 10.1 а) и рамы (рис. 10.1 в) будут:

$$n = 2 \cdot 0 + 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1 \quad \text{и} \quad n = 2 \cdot 0 + 1 + 4 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Использование этой формулы при расчете сложных рам затруднительно. Поэтому можно применить другой подход, вводя два понятия: 1) **замкнутый контур** – замкнутая цепь из элементов и связей системы; 2) **удалённая связь** – связь замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов (рис. 10.1 б, г, е).

Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равняется трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из n_k замкнутых контуров, из которых удалены $n_{уд}$ связей, будет

$$n = 3n_k - n_{уд}.$$

При использовании этой формулы для балки (рис. 10.1 а) и рам (рис. 10.1 в, д) необходимо определить общее число замкнутых контуров n_k и удаленных связей $n_{уд}$ (рис. 10.1 б, г, е). Тогда

– для балки: $n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$;

– для обеих рам: $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле

$$n = n_c + n_{c_0} - 2n_y.$$

Например, для фермы (рис. 10.1 ж): $n = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

2. Выбор основной системы

Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется **основной системой** (ОС).

Например, у балки (рис. 10.2 а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $n = 1$. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее ОС (рис. 10.2 б).

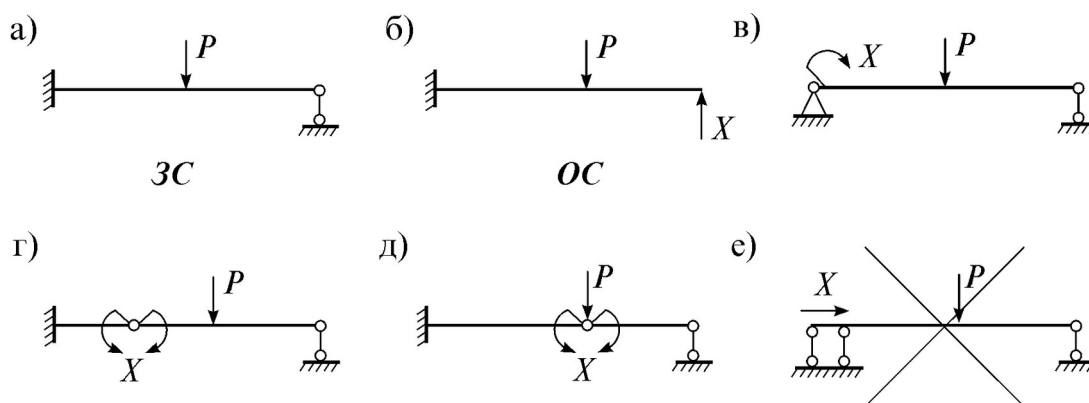


Рис. 10.2

Способов исключения лишних связей очень много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на рис. 10.2 в-е. Однако одна из этих схем (рис. 10.2 е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за основную систему.

Если воспользоваться известным теоретическим положением о том, что в линейно-упругих системах внешняя нагрузка распределяется единственным образом, то результаты расчетов по различным ОС должны быть одинаковыми. Однако объем вычислений в разных ОС может быть разным. Поэтому из многих вариантов ОС нужно выбирать наиболее рациональную. Например, в нашем примере первый вариант ОС (рис. 10.2 б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче. Поэтому основная система должна быть:

- 1) обязательно геометрически неизменяемой;
- 2) простой для расчета;
- 3) учитывать особенности сооружения и действующей нагрузки.

3. Сущность метода сил

В рассматриваемом методе расчета статически неопределимых систем за основные неизвестные принимаются силы (внутренние усилия). Поэтому он и называется *методом сил*.

Изучим метод сил на примере предыдущей балки.

Потребуем, чтобы ее ЗС (рис. 10.2 а) и ОС (рис. 10.2 б) были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи должно равняться нулю:

$$\Delta = 0.$$

По принципу суперпозиции, это перемещение равно сумме перемещения Δ_X (рис. 10.3 а) от неизвестной реакции X и перемещения Δ_P (рис. 10.3 б) от заданной силы P . Поэтому

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_P = 0.$$

Это уравнение, учитывающее геометрические особенности системы, называется *уравнением совместности деформаций*.

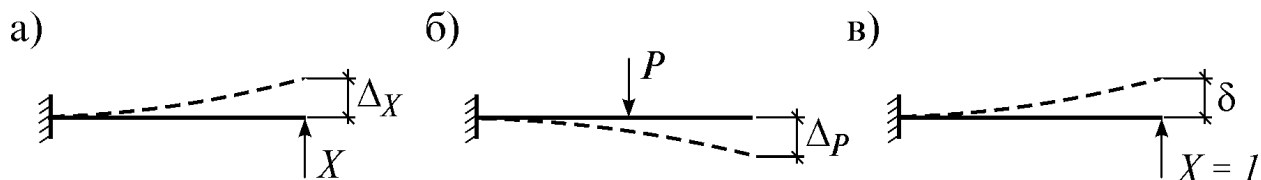


Рис. 10.3

Так как сила X неизвестна, перемещение Δ_X непосредственно определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние (ЕС) основной системы, где действует только единичная сила $P=1$ (рис. 10.3 в). Перемещение δ , возникающее в нем в направлении единичной силы, называется податливостью, и его уже можно определить.

В линейно-упругой системе по закону Гука $\Delta_X = \delta X$. Тогда последнее уравнение принимает вид

$$\delta X + \Delta_P = 0.$$

Его называют **каноническим уравнением метода сил**. Такое уравнение получается для любой один раз статически неопределимой системы. Если известны δ и Δ_P , из него определяется неизвестная сила: $X = -\Delta_P / \delta$.

Если в системе имеется n лишних связей, то нужно исключить все эти лишние связи и выбрать ОС с n неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n . Тогда, из условий эквивалентности ЗС и ее ОС (условий равенства нулю перемещений в направлениях исключенных связей) можно составить n уравнений совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \dots + \Delta_{1X_n} + \Delta_{1P} = 0, \\ \Delta_2 &= \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \dots + \Delta_{2X_n} + \Delta_{2P} = 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \Delta_{nX_1} + \Delta_{nX_2} + \dots + \Delta_{nX_n} + \Delta_{nP} = 0. \end{aligned}$$

При рассмотрении n различных единичных состояний системы и определении податливостей δ_{ij} по различным направлениям, эти уравнения приводятся к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned}$$

Она называется **системой канонических уравнений метода сил**. Здесь δ_{ii} – главные коэффициенты, δ_{ij} – боковые коэффициенты. Свободные члены Δ_{iP} называются грузовыми коэффициентами.

Систему с большим количеством уравнений необходимо решать на компьютере. С этой целью введем матричные обозначения:

$$\delta = \begin{matrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{matrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix}; \quad \Delta_P = \begin{matrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{matrix}; \quad \mathbf{0} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix},$$

где δ – матрица податливости, \mathbf{X} – вектор неизвестных, Δ_P – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. В результате этого система канонических уравнений принимает вид:

$$\delta \mathbf{X} + \Delta_P = \mathbf{0}.$$

Из этого матричного уравнения определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{X} = -\delta^{-1} \Delta_P.$$

Здесь δ^{-1} – обратная матрица податливости.

4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных δ_{ij} и грузовые коэффициенты Δ_{iP} канонических уравнений – возможные перемещения от единичных сил и нагрузки. У них есть два индекса. Первый индекс i указывает на направление, а второй индекс j (или P) – на причину перемещения.

Методику вычисления этих коэффициентов изучим на примере некоторой условной системы (рис. 10.4 а) и ее основной системы (рис. 10.4 б).

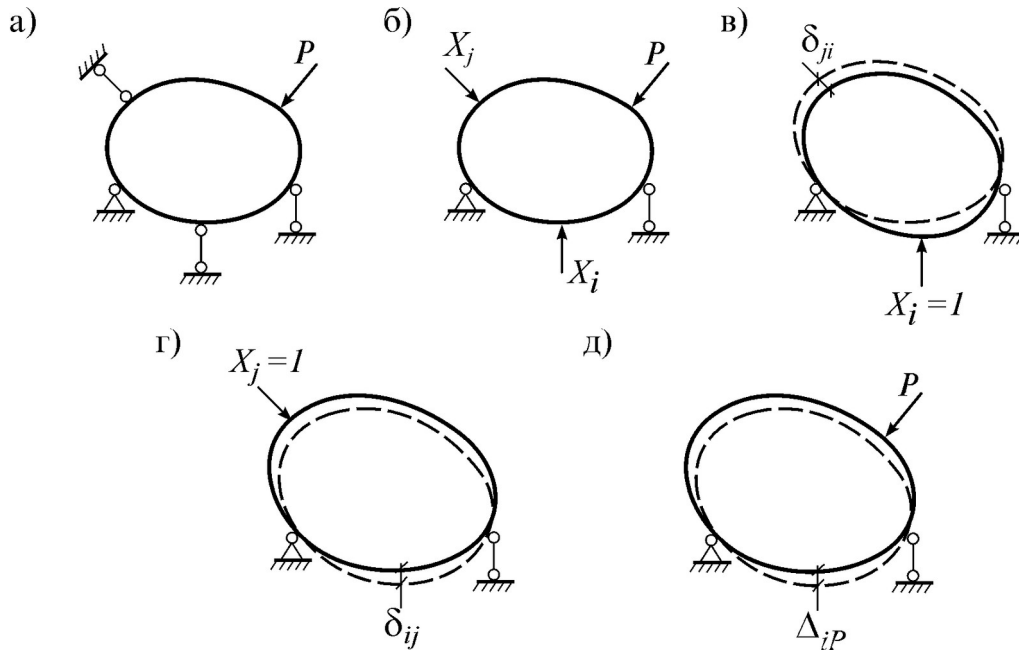


Рис. 10.4

Для определения коэффициентов δ_{ij} рассмотрим два состояния ОС:

- 1) i -ое единичное состояние – воздействие силы $X_i=1$ (рис. 10.4 в);
- 2) j -ое единичное состояние – воздействие силы $X_j=1$ (рис. 10.4 г).

Если в этих состояниях возникают внутренние усилия $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ и $\bar{M}_j, \bar{Q}_j, \bar{N}_j$, то возможная работа внутренних сил i -го состояния на деформациях j -го состояния будет:

$$-V_{ij} = \int_{k=1}^n \left(\frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

С другой стороны, возможная работа внешних сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна

$$W_{ij} = 1 \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

По принципу возможных перемещений $W_{ij} = -V_{ij}$. Приравнявая их, получаем формулу для вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{ij} = \int \left(\frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

$k=10$

Теорема Максвелла. Перемещение в i -ом направлении от единичной силы в j -ом направлении равно перемещению в j -ом направлении от единичной силы в i -ом направлении, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Доказательство. Возможную работу сил i -го состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях j -го (рис. 10.4 г) мы уже определили: $W_{ij} = \delta_{ij}$. А возможная работа сил j -го состояния на перемещениях i -го равна $W_{ji} = 1 \cdot \delta_{ji} = \delta_{ji}$. По теореме Бетти $W_{ij} = W_{ji}$. Следовательно, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Эта теорема позволяет уменьшать объем вычислений при нахождении боковых коэффициентов системы канонических уравнений.

Теперь выведем формулу вычисления грузовых коэффициентов.

Вначале определим возможную работу сил i -го единичного состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях грузового состояния (рис. 10.4 д):

$$W_{iP} = 1 \cdot \Delta_{iP} = \Delta_{iP}.$$

С другой стороны, возможная работа внутренних сил $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ i -го единичного состояния на деформациях грузового состояния равна

$$-V_{iP} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} dx.$$

По принципу возможных перемещений $W_{iP} = -V_{iP}$. Приравнявая их, получим формулу вычисления грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} dx.$$

Так как в рамах и балках перемещения определяются в основном изгибными деформациями, то коэффициенты канонических уравнений можно вычислять по сокращенным формулам:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_j}{EI} dx = \overline{M}_i M_j, \quad \Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx = \overline{M}_i M_P,$$

где условный знак использован для сокращения записи формулы вычисления интеграла Мора и означает условное «произведение» двух эпюр.

Вопросы

1. Какие отличия имеют статически неопределимые системы от статически определимых систем?
2. Как определяется число лишних связей статически неопределимой системы?
3. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
4. В чем заключается физический смысл канонических уравнений метода сил?
5. Чем отличается вычисление коэффициентов при неизвестных от вычисления грузовых коэффициентов?
6. Какое преимущество дает использование теоремы Максвелла?

Лекция 11

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ (продолжение)

5. Проверка правильности коэффициентов

При вычислении коэффициентов системы канонических уравнений возможны ошибки. Поэтому их надо проверять.

Существует три способа проверки коэффициентов.

1. Построчная проверка проводится для проверки всех коэффициентов одного уравнения.

Если сложить все коэффициенты при неизвестных i -го уравнения, то

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = M_i \overline{M_1} + \overline{M_i} \overline{M_2} + \dots + \overline{M_i} \overline{M_n} = \\ &= \overline{M_i} (\overline{M_1} + \overline{M_2} + \dots + \overline{M_n}) = \overline{M_i} \overline{M_\Sigma} = \delta_{i\Sigma}. \end{aligned}$$

Здесь: $M_\Sigma = \sum_{i=1}^n M_i = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ – суммарная единичная эпюра, $\delta_{i\Sigma}$

– результат «произведения» i -ой единичной эпюры на эту эпюру.

Отсюда следует, что если сумма всех коэффициентов i -ой строки системы канонических уравнений равна произведению i -ой единичной эпюры на суммарную единичную эпюру, т.е.

$$\delta_{ij} = M_i \overline{M_\Sigma},$$

то коэффициенты этой строки вычислены верно.

2. Универсальная проверка используется для одновременной проверки всех коэффициентов системы канонических уравнений. Приведем (без доказательства) только общее правило этой проверки: если сумма всех коэффициентов системы канонических уравнений равна произведению суммарной единичной эпюры на себя, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M_\Sigma} \overline{M_\Sigma} = \overline{M_\Sigma^2},$$

то все коэффициенты системы канонических уравнений вычислены верно.

3. Постолбцовая проверка используется для проверки коэффициентов одного столбца системы канонических уравнений. Приведем правило проверки столбца из грузовых коэффициентов: если сумма всех грузовых коэффициентов равна произведению суммарной единичной эпюры на грузовую эпюру, т.е.

$$\Delta_{ip} = M_\Sigma \overline{M_p},$$

то грузовые коэффициенты вычислены верно.

6. Определение внутренних усилий

После подсчета и проверки коэффициентов системы канонических уравнений, все они подставляются в уравнения, а потом система уравнений решается относительно неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n . Затем определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Эту задачу можно решать двумя способами:

1) подстановкой найденных величин X_1, X_2, \dots, X_n в основную систему и определением ее усилий M, Q, N ;

2) используя эпюры внутренних усилий в единичных состояниях $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ и в грузовом состоянии M_P, Q_P, N_P :

$$\begin{aligned} M &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_P \\ Q &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_P \\ N &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_P. \end{aligned}$$

При расчете рам и балок обычно используется только первая из этих формул, и по ней строится эпюра изгибающих моментов M . Эпюра Q строится по эпюре M с учетом дифференциальной зависимости, а эпюра N строится по эпюре Q способом вырезания узлов.

7. Алгоритм метода сил

Порядок расчета рамы методом сил состоит из следующих этапов:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение единичных и грузовой эпюр.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Решение системы канонических уравнений.
8. Построение эпюр M, Q, N .
9. Проверка правильности расчета. Она состоит из двух частей:
 - 1) **статическая проверка** – проверка условий равновесия;
 - 2) **кинематическая проверка** – проверка всех условий $\bar{M}_i M = 0$ ($i = 1, n$) или общего условия $\bar{M}_\Sigma M = 0$.

Действительно,

$$\bar{M}_i M = M_i (M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_P) = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iP}.$$

А это выражение равно нулю, так как является i -ой строкой системы канонических уравнений. Отсюда следует, что и $\bar{M}_\Sigma M = (M_1 \bar{M}_2 \dots \bar{M}_n) M = 0$, поскольку каждый из его сомножителей равняется нулю.

8. Определение перемещений

Перемещения статически неопределимых систем можно вычислять по известной формуле Мора. В системах с преобладанием изгибных деформаций (например, в рамах и балках) она имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int \overline{M} M dx$$

Здесь \overline{M} и M – эпюры моментов от единичной силы и нагрузки в заданной статически неопределимой системе. Однако, построение этих эпюр связано с решением трудоемких задач раскрытия статической неопределимости.

Задача упрощается, если одну из этих эпюр строить в основной системе и использовать формулы $\Delta = M_0 M$ или $\Delta = \overline{M} M_P$, где M_0 и M_P – единичная и грузовая эпюры в любой основной системе метода сил.

9. Расчет симметричных рам

Симметричными называются системы, расчетные схемы которых симметричны относительно некоторой оси.

Расчет любой симметричной рамы (рис. 11.1 а) можно упростить, если воспользоваться ее симметрией и разложить внешнюю нагрузку на симметричную (рис. 11.1 б) и кососимметричную (рис. 11.1 в) нагрузки.

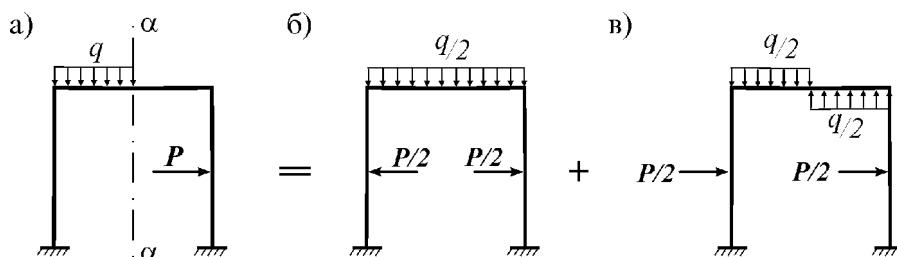


Рис. 11.1

Тогда, хотя раму приходится рассчитывать дважды, выбор основной системы по рис. 11.2 а дает значительный выигрыш в вычислениях.

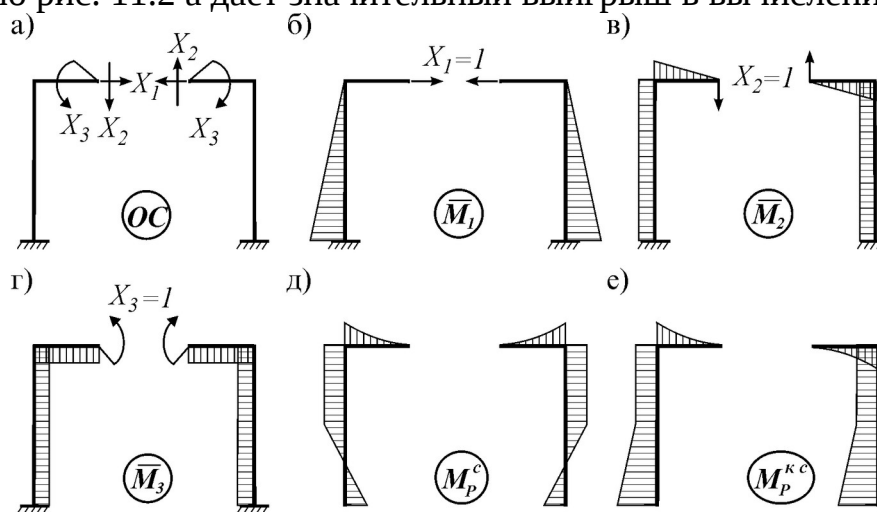


Рис. 11.2

Канонические уравнения метода сил при расчете этой рамы будут:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

Во всех трех единичных состояниях построим эпюры моментов (рис. 11.2 б, в, г). Из них две эпюры (рис. 11.2 б, г) – симметричные, а одна (рис. 11.2 в) – кососимметричная.

Симметричная (с) и кососимметричная (кс) эпюры взаимно-ортогональны, т.к. их “произведение” равно нулю:

$$\overline{M}_i^c \overline{M}_j^{кс} = 0.$$

Поэтому следующие коэффициенты системы канонических уравнений обращаются в нуль: $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ и $\delta_{32} = \delta_{23} = 0$, и система канонических уравнений распадается на две независимые системы:

$$(1) \begin{matrix} \delta_{11} X_1 & \delta_{13} X_3 & \Delta_{1P} & 0, \\ \delta_{31} X_1 & \delta_{33} X_3 & \Delta_{3P} & 0; \end{matrix} \quad (2) \begin{matrix} \delta_{22} X_2 & \Delta_{2P} & 0, \end{matrix}$$

Значит, некоторые коэффициенты можно не вычислять, а решение большой системы канонических уравнений заменить решением двух систем уравнений значительно меньших размеров.

а) Расчет на симметричную нагрузку

Так как эпюра изгибающих моментов при действии симметричной нагрузки также является симметричной (рис. 11.2 д), то она ортогональна кососимметричной эпюре \overline{M}_2 . Следовательно, $\Delta_{2P} = 0$. Поэтому, как следует из уравнения (2), $X_2 = 0$. Таким образом, при симметричной нагрузке кососимметричная неизвестная равна нулю. В этом случае эпюра изгибающих моментов будет строиться по формуле

$$M^c = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_3 X_3 + M^c.$$

Она, как сумма симметричных эпюр, также будет симметричной. В этом случае эпюра Q будет кососимметричной, а эпюра N будет симметричной.

б) Расчет на кососимметричную нагрузку

В этом случае эпюра изгибающих моментов кососимметрична (рис. 11.2 е) и ортогональна симметричным эпюрам \overline{M}_1 и \overline{M}_3 . Поэтому

$\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$, и, как следует из системы уравнений (1), $X_1 = X_3 = 0$. Итак, при кососимметричной нагрузке все симметричные неизвестные равны нулю. Тогда эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M^{кс} = \overline{M}_2 X_2 + M_p^{кс},$$

она и эпюра N будут кососимметричными, а эпюра Q – симметричной.

Окончательная эпюра определяется как сумма двух решений:

$$M = M^c + M^{кс}.$$

9. Группировка неизвестных

Если при расчете симметричной рамы (рис. 11.3 а) выбрана обычная основная система (рис. 11.3 б), все коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

будут отличаться от нуля.

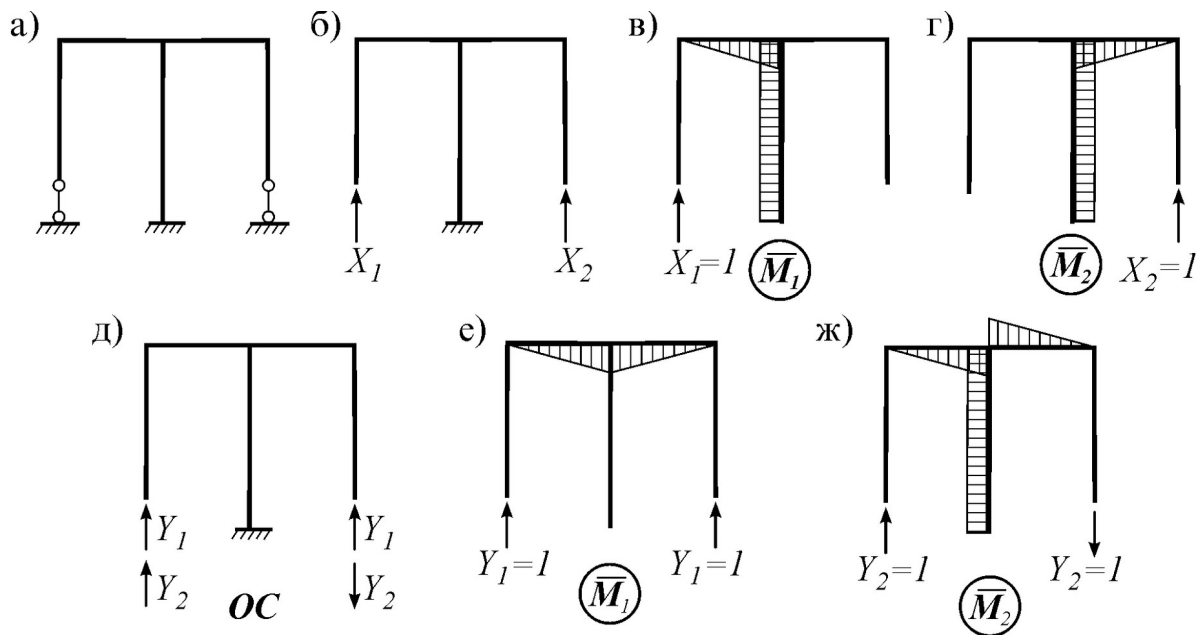


Рис. 11.3

Если же неизвестные группировать по формулам

$$X_1 = Y_1 + Y_2, \quad X_2 = Y_1 - Y_2,$$

что соответствует выбору основной системы на рис. 11.3 д, то единичные эпюры (рис. 11.3 е, ж) будут ортогональными ($M_1 M_2 = 0$), а канонические уравнения распадутся на два независимых уравнения:

$$\delta_{11} Y_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{22} Y_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Итак, при группировке неизвестных некоторые коэффициенты обращаются в нуль, и их вычислять не требуется. В то же время система канонических уравнений распадается на две, что упрощает их решение. Как видим, группировка неизвестных уменьшает объем вычислений.

В о п р о с ы

1. Какие имеются способы проверки коэффициентов канонических уравнений?
2. Из каких этапов состоит алгоритм метода сил?
3. Какие способы проверки правильности расчета существуют?
4. Как определяются перемещения статически неопределимых систем?
5. Какая система называется симметричной?
6. Какое преимущество дает использование симметрии рамы?
7. В чем состоит группировка неизвестных?

Лекция 12

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях. После их вычисления из канонических уравнений можно определять все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации системы.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. В этом случае связи не исключаются, а делается наоборот – в систему вводятся дополнительные связи. За неизвестные принимаются перемещения во введенных связях, которые определяются из канонических уравнений. Поэтому этот метод называется *методом перемещений*.

1. Неизвестные метода перемещений

Установим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения напряженно-деформированного состояния статически неопределимой стержневой системы.

С этой целью определим простейшие деформации некоторого стержня AB стержневой системы, которые он получает при переходе в новое положение $A'B'$ под воздействием внешней нагрузки (рис. (12.1 а)). Данная задача упрощается, если стержень закрепить по обоим концам и, задавая его концам некоторые независимые перемещения, привести стержень к окончательному деформированному состоянию $A'B'$.

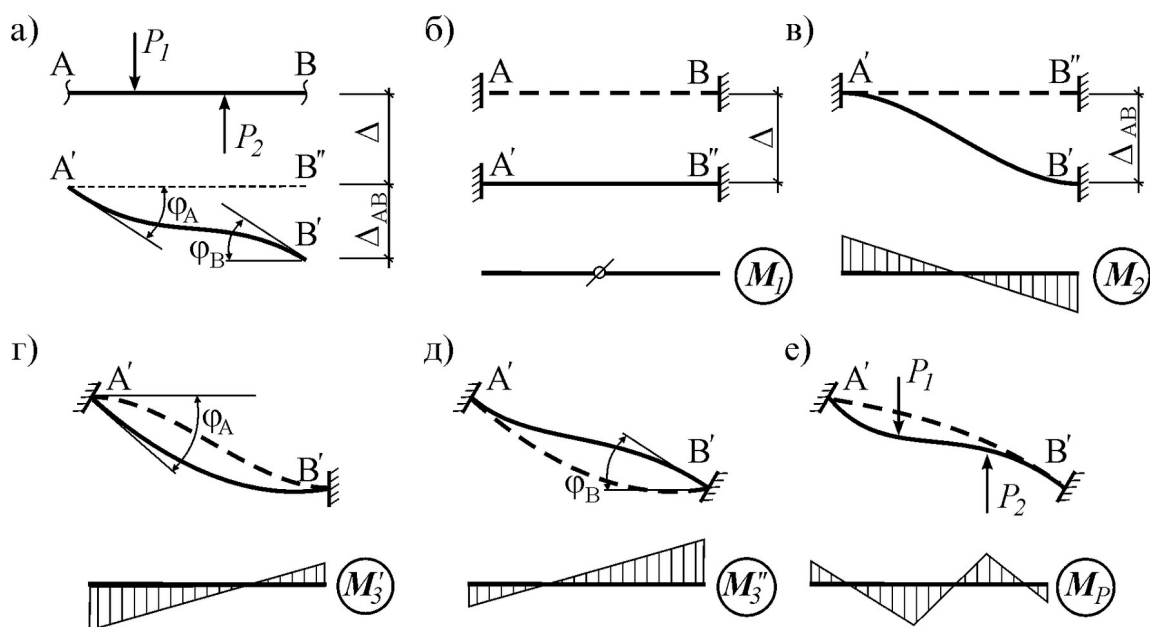


Рис. 12.1

Как следует из рис. 12.1, для этого концам закрепленного стержня АВ необходимо последовательно задавать поступательные (линейные) перемещения Δ и Δ_{AB} (рис. 12.1 б, в), угловые перемещения ϕ_A и ϕ_B (рис. 12.1 г, д), а внутри стержня приложить внешнюю нагрузку (рис. 12.1 е).

От перемещения Δ всего стержня внутренние усилия и деформации не возникают (на рис. 12.1 б $M_1 = 0$). Внутренние усилия и деформации от местной нагрузки, действующей в пределах закрепленного стержня АВ, можно найти отдельно. Значит, для определения НДС всего стержня достаточно знать три неизвестных перемещения – два угловых перемещения его концов ϕ_A , ϕ_B и одно поступательное перемещение – взаимное смещение концов стержня Δ_{AB} . Поэтому степень кинематической неопределимости отдельного стержня равняется трем.

2. Выбор основной системы

Основная система метода перемещений должна быть кинематически определимой. Для ее получения в заданную систему следует ввести столько дополнительных связей, чтобы концы всех стержней были закреплены, т. е. исключены их перемещения. Поэтому общее число вводимых связей будет равно числу неизвестных метода перемещений.

Однако число вводимых связей может быть весьма большим. Например, рама на рис. 12.2 а состоит из пяти стержней. По результатам проведенного выше анализа, степень ее кинематической неопределимости (или число неизвестных метода перемещений) будет $5 \cdot 3 = 15$.

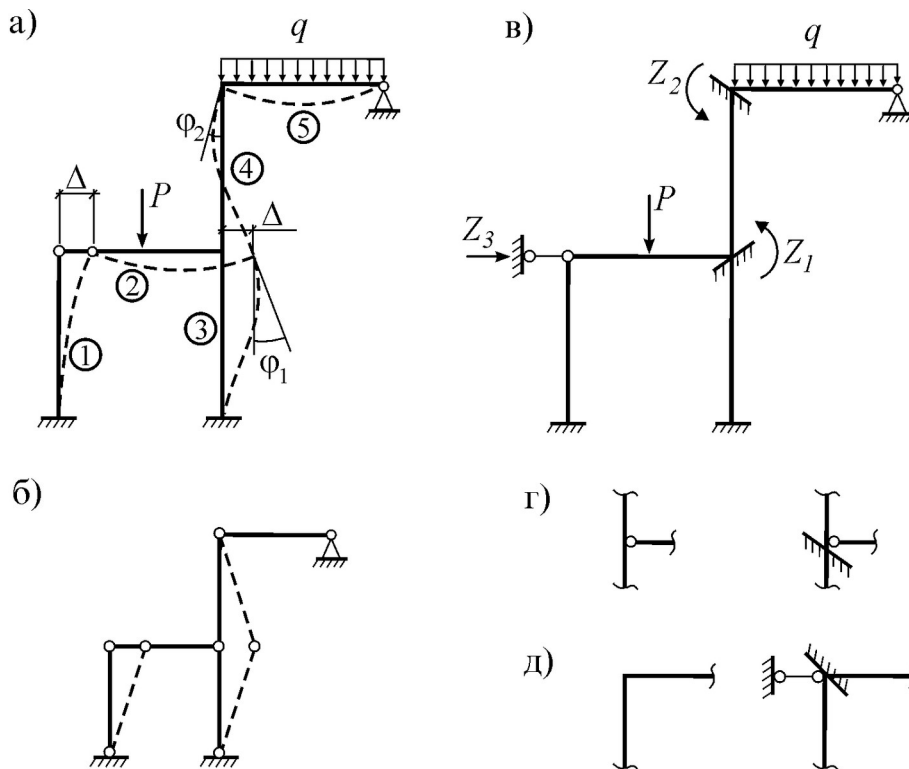


Рис. 12.2

Это число можно уменьшить, если принять следующие **гипотезы**:

- 1) поперечные и продольные деформации стержней малы;
- 2) длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня;
- 3) в упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Действительно, в этом случае в данной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение Δ и два угловых перемещения ϕ_1 и ϕ_2 (рис. 12.2 а). Таким образом, число неизвестных уменьшилось намного – с пятнадцати до трех.

Из третьей гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений будет определяться по формуле

$$n_{угл} = \text{числу упругих рамных узлов.}$$

Для определения числа неизвестных поступательных перемещений (в дальнейшем их будем называть линейными перемещениями) во все узлы рамы, включая и опоры, нужно ввести шарниры (рис. 12.2 б). Тогда число линейных перемещений легко определяется по известной формуле кинематического анализа для фермы

$$n_{лин} = W - 2n_y - n_c - n_{C_0}.$$

В рассматриваемой раме имеем $n_{лин} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$.

Общее число всех неизвестных перемещений определяется по формуле

$$n = n_{угл} + n_{лин}$$

и называется **степенью кинематической неопределенности**. Сами неизвестные перемещения обозначаются однотипно: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$.

После определения числа неизвестных в заданной системе (ЗС) следует вводить столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней. Например, в рассмотренную раму введем две заделки и одну опорную связь. Полученная схема (рис. 12.2 в) будет **основной системой (ОС) метода перемещений**.

Таким образом, для получения ОС метода перемещений необходимо:

- в упругие рамные узлы заданной системы $n_{угл}$ заделок; ввести
- в направлении поступательных перемещений узлов заданной системы ввести $n_{лин}$ опорных связей (они вводятся так, чтобы система с введенными шарнирами стала геометрически неизменяемой).

Введенные связи, хотя внешне и похожи на обычные опорные связи, от них принципиально отличаются, потому что: 1) введенная заделка исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность линейного смещения; 2) введенная опорная связь исключает только

линейное перемещение узла, оставляя возможность поворота
(рис. 12.2 г, д).

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений, по-сути, является единственной.

Пусть необходимо выбрать ОС метода перемещений для рамы (рис. 12.3 а). Она имеет четыре жестких узла. Значит, число угловых неизвестных $n_{угл} = 4$. Для определения числа линейных неизвестных во все узлы и опоры рамы введем шарниры (рис. 12.3 б). Тогда имеем: $n_{лин} = 2n_{у} - n_{с} - n_{с_0} = 2 \cdot 8 - 8 - 6 = 2$. Поэтому общее число неизвестных будет $n = n_{угл} + n_{лин} = 4 + 2 = 6$. Вводя в жесткие узлы ЗС четыре заделки и две опоры, исключающие линейные перемещения узлов рамы (последние вводятся так, чтобы механизм на рис. 12.3 б стал геометрически неизменяемым), получаем требуемую ОС (рис. 12.3 в).

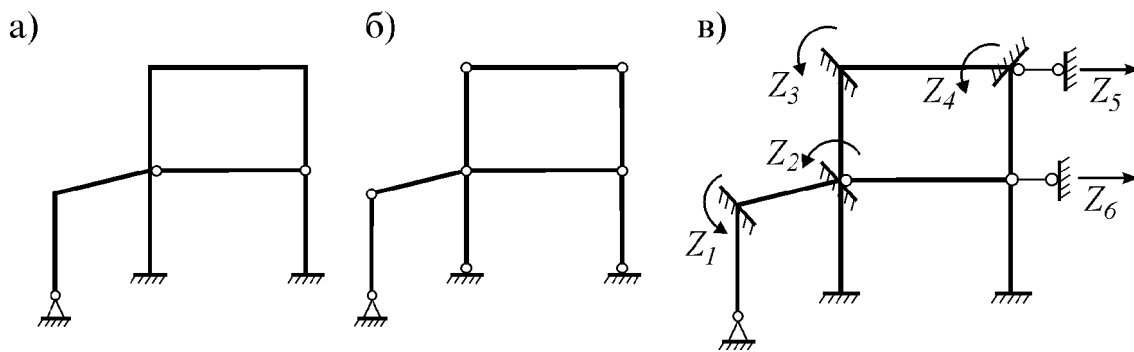


Рис. 12.3

3. Сущность метода перемещений

Данный вопрос изучим на следующем примере (рис. 12.4 а). Эта рама четырежды статически неопределима. При ее расчете методом сил нужно исключить четыре лишние связи и выбрать основную систему, например, такую как на рис. 12.4 б.

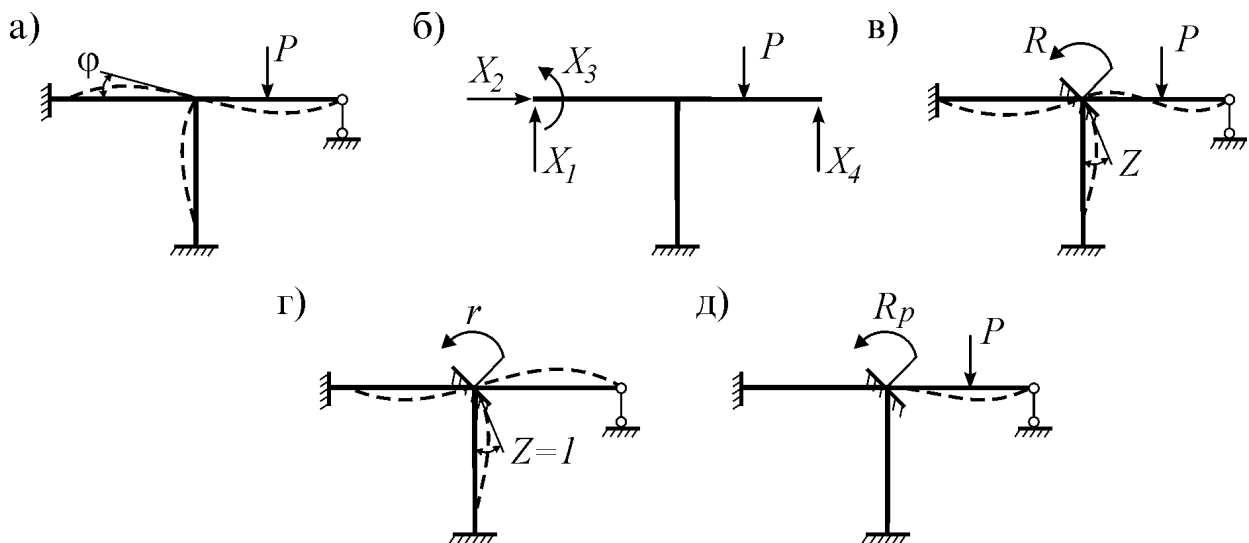


Рис. 12.4

При использовании же метода перемещений раму следует превратить в кинематически определимую. Для этого в заданную систему (ЗС) достаточно ввести $n_{\text{пузл}} + n_{\text{лин}} = 1 + 0 = 1$ кинематическую связь. Если неизвестное угловое перемещение узла обозначить через Z , получим основную систему (ОС), показанную на рис. 12.4 в.

Потребуем, чтобы усилия и деформации ОС были такими же, как у ЗС. Для этого перемещение Z должно быть равно углу поворота узла рамы ϕ (рис. 12.4 а), а реактивный момент во введенной заделке основной системы (рис. 12.4 в) должен равняться нулю:

$$R = 0.$$

Эту реакцию определим, рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии введенной связи зададим единичное перемещение $Z=1$ и определим возникающую в ней реакцию r (рис. 12.4 г). Такая реакция от единичного перемещения называется **жесткостью**.

В грузовом состоянии приложим только внешнюю нагрузку и во введенной связи основной системы определим реакцию R_p (рис. 12.4 д).

С учетом упругости системы и принципа суперпозиции, наше уравнение приводится к виду

$$r \cdot Z + R_p = 0.$$

Оно называется **каноническим уравнением метода перемещений**. Если известны реакции r и R_p , то из него можно найти величину узлового перемещения:

$$Z = -R_p / r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна n , ее ОС получается введением n дополнительных связей с неизвестными Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать n уравнений. После рассмотрения n единичных состояний, одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0, \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0. \end{aligned}$$

Все вместе они называются **системой канонических уравнений метода перемещений**. Здесь r_i – главные коэффициенты, r_{ij} – боковые

коэффициенты. Свободные члены R_{iP} являются грузовыми коэффициентами.

После введения матриц и векторов

$$\mathbf{r} = \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{matrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{matrix}, \quad \mathbf{R}_P = \begin{matrix} R_{1P} \\ R_{2P} \\ \vdots \\ R_{nP} \end{matrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

система канонических уравнений записывается в матричной форме:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_P = \mathbf{0},$$

где \mathbf{r} – матрица жесткости, \mathbf{Z} – вектор неизвестных, \mathbf{R}_P – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. Отсюда определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{R}_P,$$

где \mathbf{r}^{-1} – обратная матрица жесткости.

В о п р о с ы

1. Какие величины являются неизвестными метода перемещений?
2. Что такое степень кинематической неопределимости?
3. Какие гипотезы принимаются при расчете рам методом перемещений?
4. Как определяется основная система метода перемещений?
5. Что называется жесткостью?
6. В чем заключается сущность метода перемещений?
7. Как записывается система канонических уравнений метода перемещений?

Л е к ц и я 13

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

4. Элементарные состояния основной системы

Как было установлено в предыдущей лекции, коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений – реакции, определяемые в единичных и грузовом состояниях. Например, r_{ij} – реакция, возникающая

в i -ой связи в j -ом единичном состоянии, R_{iP} – реакция, возникающая в i -ой связи в грузовом состоянии.

Все эти реакции равны сумме реакций отдельных стержней, объединенных в узлах основной системы. Для их определения необходимо рассчитывать статически неопределимые стержни различной длины и жесткости с различными закреплениями по концам, получающие разные перемещения или нагруженные различными силами. С целью упрощения таких расчетов все типовые задачи, встречающиеся при расчете различных основных систем, решаются для общего случая. Их называют элементарными состояниями основной системы, а результаты их расчетов сводятся в таблицу. Эти задачи в большинстве случаев бывают статически неопределимыми и поэтому решаются методом сил.

Рассмотрим решение двух типовых задач.

1) Стержень с равномерно распределенной нагрузкой q

Степень статической неопределимости этой системы (рис. 13.1 а) $n=1$. Каноническое уравнение имеет вид $\delta X + \Delta_P = 0$. Выбирая основную систему (рис. 13.1 б), в единичном (рис. 13.1 в) и грузовом (рис. 13.1 д) состояниях строим единичную (рис. 13.1 г) и грузовую эпюры (рис. 13.1 е).

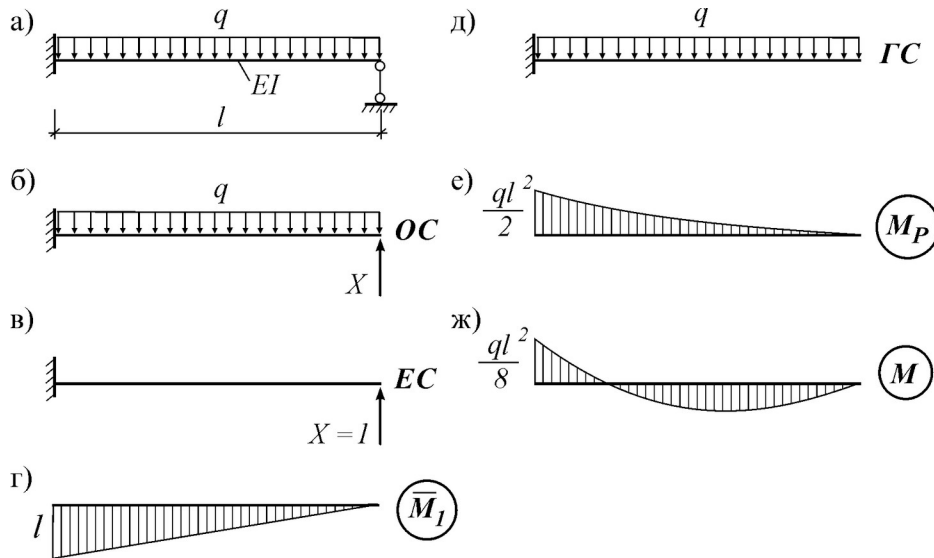


Рис. 13.1

Определим коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{M_2} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \Delta_P = \overline{M} = M = \frac{ql^4}{8EI}$$

а затем неизвестную реакцию: $R_B = X = \frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{3}{8}ql$. После этого из уравнений статики определяем остальные реакции, а по формуле $M = \overline{M}X + \overline{M}_P$ строим эпюру изгибающих моментов (рис. 13.1 ж).

2) Поворот одного конца стержня с заделанными концами

Пусть один конец стержня с заделанными концами поворачивается на единичный угол (рис. 13.2 а). У этой системы степень статической неопределимости $n=3$. Однако, если не учитывать продольную деформацию, вместо заданной системы можно рассматривать стержень с правой опорой в виде ползуна (рис. 13.2 б) и принять $n=2$.

Система канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Если основную систему выбрать симметричной (рис. 13.2 в), в обоих единичных состояниях (рис. 13.2 г, е) единичные эпюры \overline{M}_1 , \overline{M} легко строятся (рис. 13.2 д, ж). В грузовом состоянии (рис. 13.2 з) момент не возникает, поэтому

$M_p = 0$.

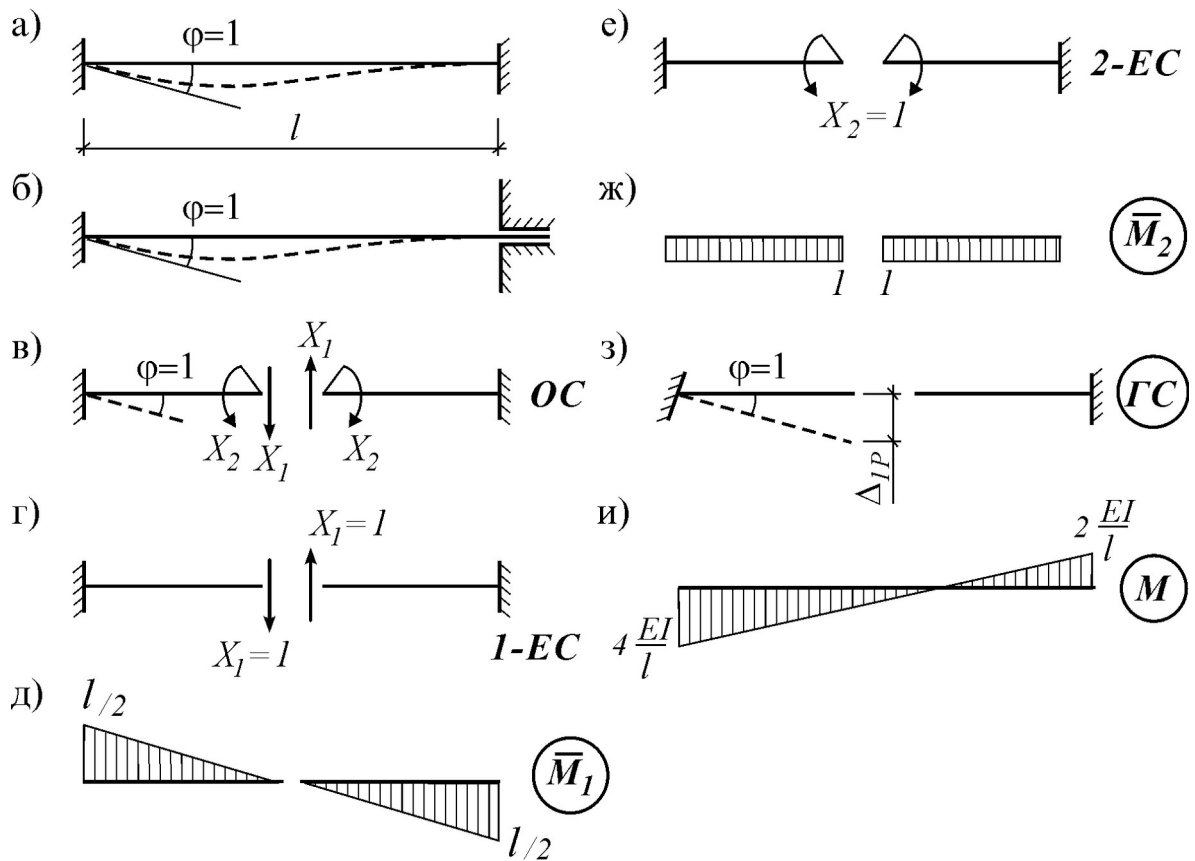


Рис. 13.2

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{M_1}{l^3}, \delta_{12} = \frac{M_1}{l^2} \operatorname{tg} \phi, \delta_{21} = \frac{M_2}{l^2} \operatorname{tg} \phi, \delta_{22} = \frac{M_2}{l^2} \operatorname{tg}^2 \phi$$

Из рис. 13.2 з следует, что $\Delta_{1P} = -\frac{6EI}{l^2}$ и $\Delta_{2P} = \frac{EI}{l}$ $\phi = 1$, а

из канонических уравнений получаем

$$X_1 = -\frac{6EI}{l^2}, X_2 = \frac{EI}{l}$$

Так как $M_P = 0$,
имеем $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$ (рис. 13.2 и).

Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев, встречающихся в различных основных системах. Результаты их расчетов сводятся в единую таблицу (табл. 2).

5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты канонических уравнений метода перемещений можно определять статическим или кинематическим способами.

Статический способ основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики). Если искомая реакция является

реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю

Таблица 2
Таблица метода перемещений

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>

момента в узле $\Sigma M=0$; если же она является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось (например, на ось x) в направлении этой реакции $\Sigma X=0$. Статический способ достаточно прост для использования, поэтому является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Докажем одну полезную теорему.

Первая теорема Релея. Реакция, возникающая в j -ой связи от перемещения i -ой связи на единицу, равна реакции i -ой связи от перемещения j -ой связи на единицу, т.е. $r_{ji} = r_{ij}$.

Доказательство. Рассмотрим i -ое и j -ое единичные состояния основной системы некоторой рамы (рис. 13.3 а, б) и соответствующие эпюры моментов в этих состояниях (рис. 13.3 г, д).

Возможная работа сил j -ого единичного состояния (рис. 13.3 б) на перемещениях i -го состояния (рис. 13.3 а) равна

$$W_{ji} = r_{ij} \cdot 1 = r_{ij}.$$

Работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния будет

$$W_{ij} = r_{ji} \cdot 1 = r_{ji}.$$

По теореме Бетти $W_{ji} = W_{ij}$. Значит, равны и правые части, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$.

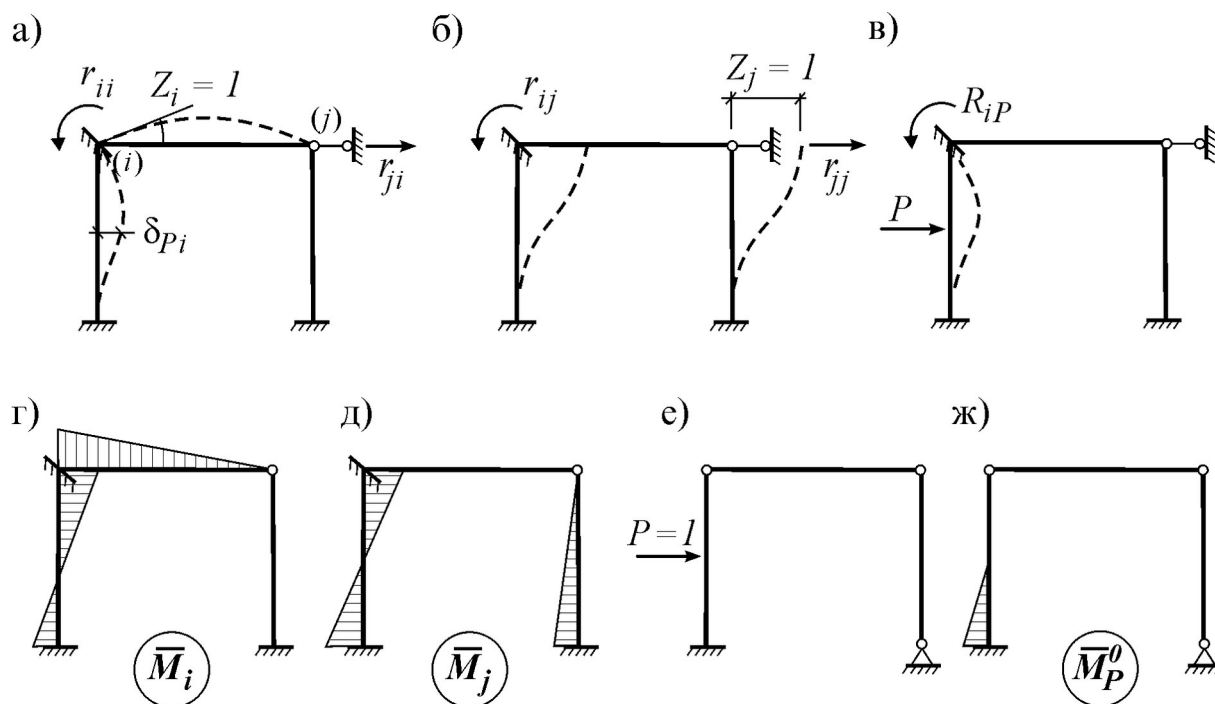


Рис. 13.3

Эту теорему иногда называют **теоремой о взаимности реакций**. Она позволяет сократить объем вычислений побочных коэффициентов канонических уравнений.

Кинематический способ основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр. Этот способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

Для вывода формулы кинематического способа определим две возможные работы. Работа внешних сил j -го единичного состояния на перемещениях i -го состояния нам известна: $W_{ji} = r_{ij}$. А возможная работа внутренних сил j -го единичного состояния на деформации i -го состояния $\frac{\overline{M}_i}{EI}$ равна:

$$V_{ji} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx.$$

По принципу возможных перемещений $W_j + V_{ji} = 0$ или $W_j = -V_{ji}$. Отсюда получаем искомую формулу:

$$r_{ij} = - \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx \quad \text{или} \quad r_{ij} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx.$$

Формула вычисления грузовых коэффициентов отличается от аналогичной формулы метода сил (дается без вывода):

$$R_{ip} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_p^0}{EI} dx \quad \text{или} \quad R_{ip} = \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_p^0}{EI} dx,$$

где \overline{M}_p^0 – грузовая эпюра изгибающих моментов в любой статически определимой системе, полученной из заданной системы удалением лишних связей.

6. Определение усилий

После определения всех коэффициентов, они подставляются в систему канонических уравнений. Затем она решается и определяются неизвестные Z_1, Z_2, \dots, Z_n . После этого определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Этот расчет выполняется аналогично методу сил. Вначале по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_p$$

определяются моменты. Затем по эпюре M определяются поперечные силы Q , а по ним – продольные силы N .

7. Алгоритм метода перемещений

Метод перемещений реализуется в следующей последовательности:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.

5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
 6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
 7. Решение канонических уравнений.
 8. Построение эпюр M , Q , N .
 9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.
- Как видим, алгоритмы метода перемещений и метода сил совпадают.

8. Сравнение методов сил и перемещений

При более подробном рассмотрении можно выявить не только сходные, но и принципиально отличающиеся стороны методов сил и перемещений. Рассмотрим некоторые из них:

- оба метода используются для расчета статически неопределимых систем; при принятии одинаковых допущений оба приводят к единому результату, а при использовании в разных областях дополняют друг-друга;
- в методе сил неизвестными являются силы, а в методе перемещений неизвестными являются перемещения; при расчете одной и той же системы число их неизвестных часто бывает разным, поэтому одни системы выгоднее рассчитывать методом сил, другие – методом перемещений;
- в методе сил основная система получается удалением связей, а в методе перемещений – введением связей;
- в методе сил вариантов основной системы много, а в методе перемещений она единственна;
- единичные состояния в методе сил определяются воздействием единичных сил, в методе перемещений – единичных перемещений;
- в методе сил необходимые эпюры в основной системе строятся обычным способом, а в методе перемещений – по готовой таблице;
- коэффициенты канонических уравнений в методе перемещений определяются проще (из уравнений статики);
- многие из боковых коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений равняются нулю, что упрощает ее решение и т.д.

В о п р о с ы

1. Как рассчитываются элементарные состояния основной системы метода перемещений?
2. Какие способы используются при определении коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
3. Как формулируется теорема Релея?
4. Как определяются окончательные усилия в методе перемещений?
5. Из каких этапов состоит алгоритм метода перемещений?
6. Какие сходства и различия имеют метод сил и метод перемещений?

Лекция 14

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ СМЕШАННЫМ И КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДАМИ

Кроме методов сил и перемещений, при расчете статически неопределимых систем могут использоваться и другие методы. Например, когда структура расчетной схемы сооружения по длине и высоте неоднородна (одна часть имеет малое количество лишних связей, а другая – большое количество лишних связей и малую подвижность), выгодно использовать смешанный или комбинированный методы.

14.1. Смешанный метод расчета

Этот метод основан на смешанном выборе неизвестных основной системы статически неопределимой системы – в одной части они выбираются по методу сил (удалением лишних связей), а в другой – по методу перемещений (введением дополнительных связей). Поэтому основные неизвестные этого метода состоят из двух типов величин – сил и перемещений, а их общее количество определяет число неизвестных метода. Так как к одной части основной системы применяется метод сил, то и основная система смешанного метода может выбираться по-разному.

Как и в методах сил и перемещений, в смешанном методе рассматриваются единичные и грузовое состояния основной системы. Эпюры усилий в этих состояниях строятся по-разному – в одной части как в методе сил (например, методом простых сечений), а в другой части – как в методе перемещений (с использованием таблицы метода перемещений).

Канонические уравнения смешанного метода также бывают двух типов. Уравнения первого типа – кинематические уравнения, аналогичные уравнениям метода сил. Они выражают условия равенства нулю перемещений в удаленных связях. Уравнения второго типа – статические уравнения, аналогичные уравнениям метода перемещений. Они выражают условия равенства нулю реакций во введенных связях.

Если обозначить неизвестные силы через X_1, X_2, \dots, X_k , а неизвестные перемещения через $Z_{k+1}, Z_{k+2}, \dots, Z_n$, канонические уравнения смешанного метода будут двух типов:

$$\begin{array}{l}
 \delta_{11}X_1 \quad \delta_{1k}X_k \quad \delta_{1,k1}Z_{k1} \quad \dots \quad \delta_{1n}Z_n \quad R_{1P} = 0, \\
 \text{(I)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \delta_{k1}X_1 \quad \dots \quad \delta_{kk}X_k \quad \delta_{k,k1}Z_{k1} \quad \delta_{kn}Z_n \quad R_{kP} = 0; \\
 r_{k1,1}X_1 \dots r_{k1,k}X_k \quad r_{k1,k1}Z_{k1} \dots r_{k1,n}Z_n \quad R_{k1,P} = 0, \\
 \text{(II)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 r_{n1}X_1 \quad \dots \quad r_{nk}X_k \quad r_{n,k1}Z_{k1} \quad r_{nn}Z_n \quad R_{nP} = 0.
 \end{array}$$

Как обычно, в этих уравнениях выполняются равенства $\delta_{ij}=\delta_{ji}$, $r_{ij}=r_{ji}$. Однако в уравнения I-го типа, кроме коэффициентов $\delta_{11}, \dots, \delta_{kk}$, определяемых в основной системе как перемещения от единичных сил $X_i=1$ ($i=1,2,\dots,k$), входят коэффициенты δ_{ij} , определяемые как перемещения от единичных перемещений $Z_j=1$ ($j=k+1,\dots,n$). А в уравнения II-го типа, кроме обычных коэффициентов $r_{k+1,k+1}, \dots, r_{nn}$, входят коэффициенты r_{ji} , определяемые как реакции от единичных сил $X_i=1$.

Упростить их определение позволяет следующая теорема.

Вторая теорема Релея. Величина перемещения системы в i -ом направлении от единичного перемещения j -ой связи равна реакции в j -ой связи от действия единичной силы в i -ом направлении, взятой с обратным знаком, т.е. $\delta_{ij} = -r_{ji}$.

Доказательство. Для этого рассмотрим некоторую систему и два ее возможных состояния. В одном из них прикладывается единичная сила $X_i=1$ (рис. 14.1 а), а во втором – единичное перемещение (рис. 14.1 б).

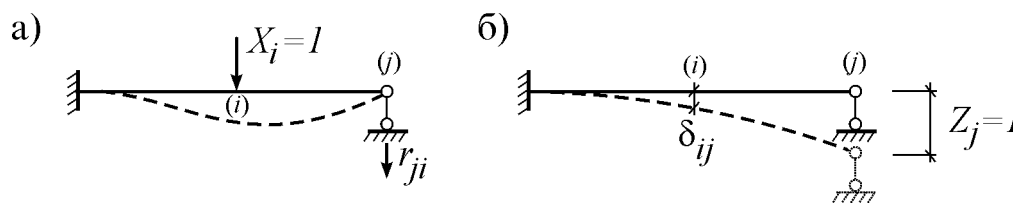


Рис. 14.1

Возможная работа сил первого состояния на перемещениях второго равна

$$W_{12} = 1\delta_{ij} + r_{ji}1,$$

а возможная работа сил второго состояния на перемещениях первого равна

$$W_{21} = 0.$$

По теореме Бетти $W_{12} = W_{21}$. Приравнявая два выражения работы, получим требуемое соотношение $\delta_{ij} = -r_{ji}$.

Доказанная теорема позволяет определять некоторые коэффициенты канонических уравнений без вычислений. Например, если вначале были вычислены δ_{ij} , то $r_{ji} = -\delta_{ij}$, если же были вычислены r_{ji} , то $\delta_{ij} = -r_{ji}$.

Грузовые коэффициенты канонических уравнений смешанного метода Δ_{iP} ($i=1,2,\dots,k$) и R_{jP} ($j=k+1,\dots,n$) определяются также как в методах сил и перемещений.

Окончательная эпюра изгибающих моментов в смешанном методе строится по формуле

$$M = M_1 X_1 + \dots + M_k X_k + M_{k+1} Z_{k+1} + \dots + M_n Z_n + M_P.$$

Правильность этой эпюры проверяется также как в методах сил и перемещений: перемещения в удаленных связях и реакции во введенных связях должны равняться нулю.

Коэффициенты канонических уравнений δ_{11} и δ_{1P} определяются как в методе сил – перемножением единичной и грузовой эпюр моментов по

рис. 14.2 в, д, а коэффициенты r_{22} и R_{2P} определяются как в методе перемещений – вырезанием узлов единичного и грузового состояний по рис. 14.2 г, д. Коэффициент r_2 проще всего определяется как в методе перемещений – по рис. 14.2. Тогда, по второй теореме Релея, имеем $\delta_{12} = r_{21} \cdot$

1

щений – по рис. 14.2. Тогда, по второй теореме Релея, имеем $\delta_{12} = r_{21} \cdot$

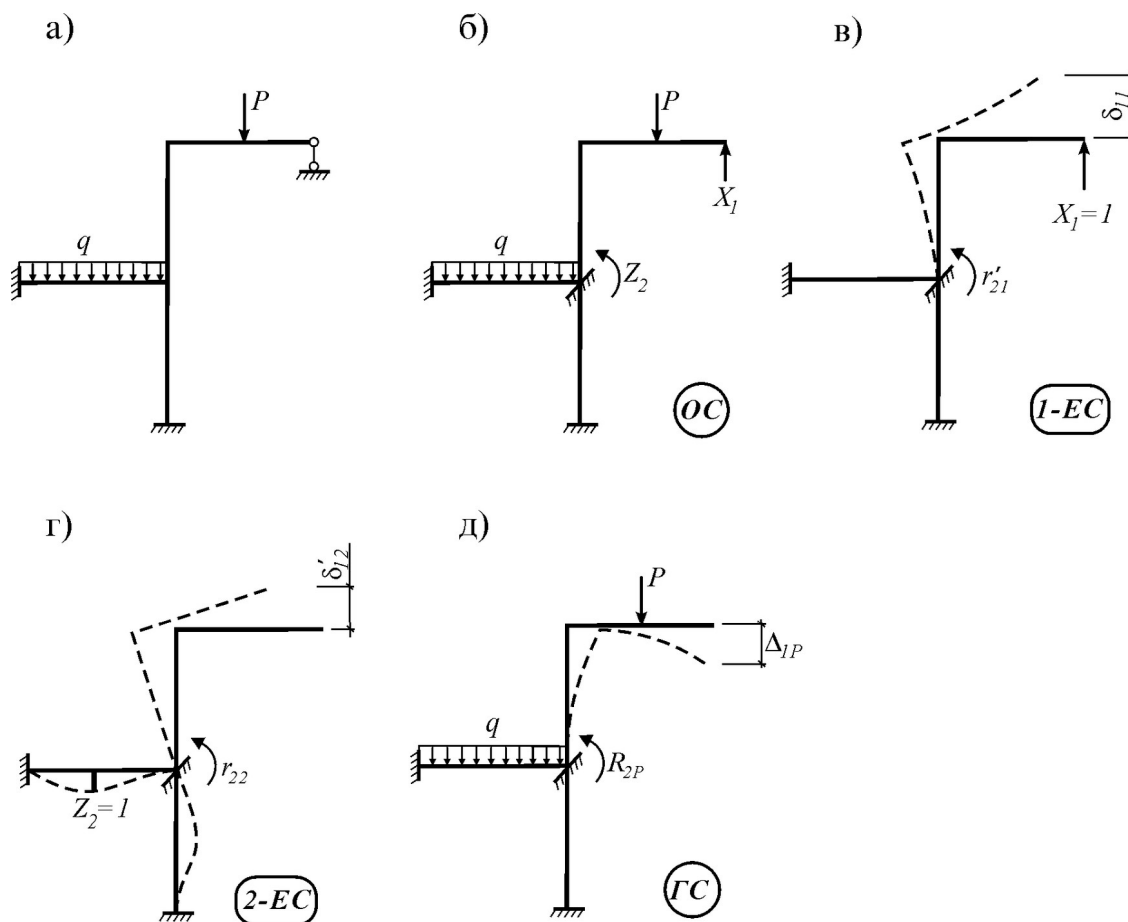


Рис. 14.2

Дальнейший расчет ведется, как обычно, по указанному выше алгоритму.

8.3. Комбинированный метод расчета

В этом методе основная система выбирается частично по методу сил (не удаляя все лишние связи) или частично по методу перемещений (не вводя дополнительные связи во все необходимые места). Поэтому, если основная система выбирается по методу сил, то она будет статически неопределимой. Если же она выбирается по методу перемещений, то будет кинематически неопределимой. В связи с этим, эпюры в единичных и грузовых состояниях основной системы смешанного метода нужно строить для нестандартных элементов. Поэтому, кроме основных неизвестных, в этом методе выбираются и вспомогательные неизвестные. Их общее число будет равно числу неизвестных смешанного метода.

Использование комбинированного метода обычно проще чем использование смешанного метода, т.к. основные неизвестные в нем рассматриваются отдельно от вспомогательных. Поэтому соответствующие два типа канонических уравнений рассматриваются раздельно. А в смешанном методе, как мы видели, оба типа канонических уравнений приходится рассматривать совместно.

При расчете симметричных рам комбинированный метод дает преимущества, если разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие. Рассмотрим этот случай на примере рамы (рис. 14.3 а), число неизвестных которой по методам сил и перемещений будут

$$n_{mc} = 3n_k - n_{yd} = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

$$n_{mn} = n_{ygl} + n_{лин} = 2 + 1 = 3.$$

Внешнюю нагрузку представим как сумму симметричной (рис. 14.3 б) и кососимметричной (рис. 14.3 в) нагрузок.

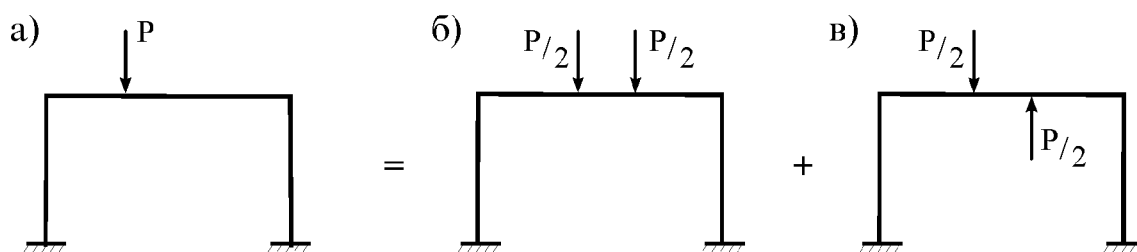


Рис. 14.3

Как было установлено при расчете симметричной рамы методом сил, метод сил выгоден при расчете на кососимметричную нагрузку. Действительно, при выборе основной системы как на рис. 14.3 б, симметричные неизвестные X_1 и X_3 будут обращаться в нуль, и поэтому из трех уравнений останется только одно каноническое уравнение

$$\delta_{22} X_2 \stackrel{kc}{=} R_{2P} = 0.$$

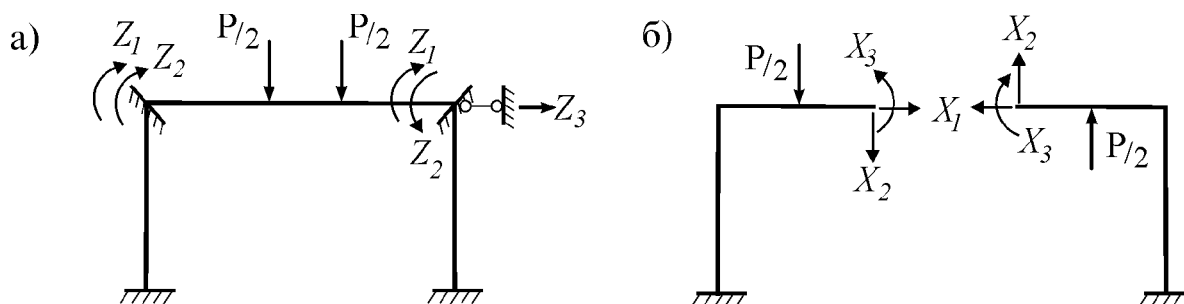


Рис. 14.4

Аналогично, при расчете на симметричную нагрузку, кососимметричные неизвестные Z_1 и Z_3 метода перемещений (рис. 14.4 а) также обратятся в нуль, и из трех уравнений остается только одно каноническое уравнение

$$r_{22} Z_2 \stackrel{Rc}{=} R_{2P} = 0.$$

Таким образом, расчет заданной системы с тремя неизвестными сводится к простым расчетам двух систем, имеющих по одной неизвестной. Окончательная эпюра изгибающих моментов определяется суммой двух решений:

$$M \quad M^c \quad M^{kc} .$$

В о п р о с ы

1. В чем сущность смешанного метода?
2. Как формулируется вторая теорема Релея?
3. С какой целью применяется эта теорема?
4. Какое преимущество имеет комбинированный метод расчета?

Л е к ц и я 15

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

1. Континуальный и дискретный подходы в механике

В механике существуют два разных взгляда на объект исследования: континуальный и дискретный подходы.

Континуальный подход (по-латыни *continuum* – непрерывный, сплошной) основан на рассмотрении сооружения как непрерывной системы, состоящей из бесконечного числа элементов. Такой подход позволяет определять напряженно-деформированное состояние (НДС) системы во всех ее точках. Однако для этого необходимо составлять и решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Например, в теории упругости составляется система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений равновесия, совместности деформаций и физических уравнений.

Дискретный подход (по-латыни *discretus* – прерывистый, состоящий из отдельных частей) основан на изучении НДС сооружения только в отдельных точках. Количество и место этих точек устанавливается расчетчиком.

При дискретном подходе рассматриваются элементы расчетной схемы конечного размера (например, отдельные стержни) и изучаются условия равновесия, внутренние усилия, деформации и перемещения лишь отдельных точек системы. Такой подход приводит к системе алгебраических уравнений – аналогу дифференциальных уравнений континуального подхода.

В последние годы дискретные методы расчета сооружений начали широко использоваться. Их преимущество состоит в матричном представлении статических, геометрических и физических свойств сооружения, проведении расчета различных по форме и сложности сооружений по единым методикам и алгоритмам на компьютере. Общая схема расчета сооружений дискретным методом выглядит так:

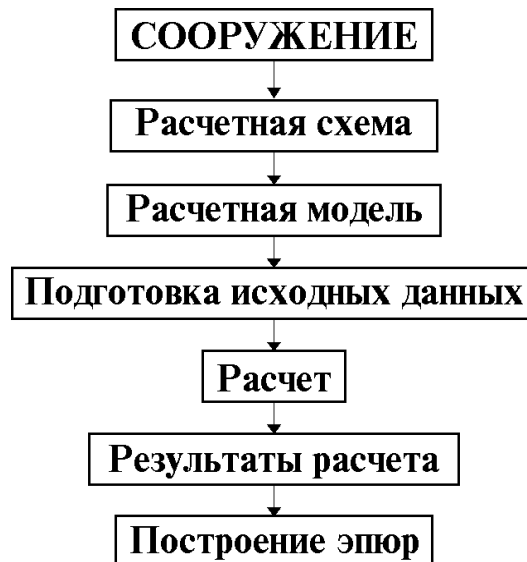


Рис. 15.1

2. Дискретная модель стержневой системы

Выбор дискретной расчетной модели стержневой системы начинается с разбиения расчетной схемы на элементы – на стержни постоянного сечения. В плоской стержневой системе эти элементы могут соединяться в шарнирном или жестком узлах (рис. 15.2):



Рис. 15.2

Здесь u_1 , u_2 , u_3 – независимые перемещения узла (u_1 , u_2 – линейные перемещения, u_3 – угловое перемещение). У шарнирного узла число независимых перемещений равно двум, а у жесткого – трем. Они называются **степенями свободы узла**.

Общее число степеней свободы дискретной модели определяется суммой чисел степеней свободы отдельных узлов. Если обозначить его через n , а все перемещения узлов пронумеровать рядом натуральных чисел от 1 до n и объединить в единый вектор, получим

$$\mathbf{u} \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n .$$

Он называется **вектором перемещений дискретной модели**.

Если в расчетной схеме имеются стержни переменного сечения, их следует представить в виде нескольких стержней постоянного сечения, а в места скачков сечений необходимо вводить узлы. В системах с криволинейными стержнями (в арках, кольцах и др.) криволинейные элементы следует заменять ломаной фигурой – многоугольником.

В дискретном методе нагрузка может быть приложена только в узлах.

Однако в расчетной схеме нагрузка может быть и распределенной, и приложенной в виде сосредоточенных сил в точках, не совпадающих с узлами. Такие нагрузки следует переносить в соседние узлы как узловые силы, действующие в направлении степеней свободы дискретной модели. В результате этого формируется **вектор внешней нагрузки**

$$\mathbf{P} = \{ P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n \}.$$

Внутренние усилия и деформации, которые требуется определить, также собираются в отдельные вектора

$$\mathbf{S} = \{ S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_m \},$$

$$\mathbf{\Delta} = \{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_m \},$$

$$\Delta_1$$

где \mathbf{S} – вектор усилий, $\mathbf{\Delta}$ – вектор деформаций, m – число усилий.

Внешнюю нагрузку в узлы можно переносить по-разному.

В качестве примера рассмотрим три варианта переноса распределенной нагрузки q , действующей на балку (рис. 15.3 а), в узел расчетной модели, введенной в середине этой балки (рис. 15.3 б).

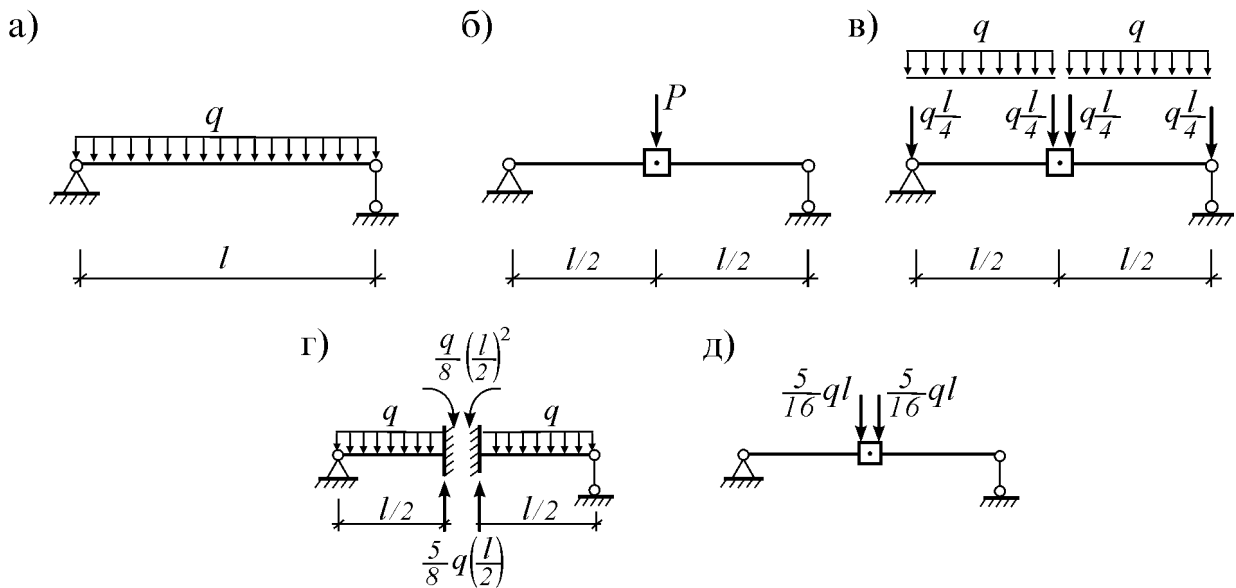


Рис. 15.3

а) Статически эквивалентный перенос

Поделим балку на два участка, а распределенную в них нагрузку учтем как давления $ql/4$ на концы участков балки (рис. 15.3 в). Давления на концы балки воспринимаются ее опорами, поэтому их можно не учитывать. Объединив оставшиеся две силы в середине балки, получим статически эквивалентную нагрузку, приложенную в середине балки:

$$P = q \frac{l}{4} + q \frac{l}{4} = 0,5ql.$$

б) Перенос с сохранением энергии

Решение этой задачи подробно рассматривать не будем. Отметим только, что для этого необходимо приравнять энергии рассматриваемой

балки (рис. 15.3 а) и балки с сосредоточенной силой (рис. 15.3 б). В результате получается «точный» результат:

$$P \frac{2ql}{\pi} \approx 0,637 ql .$$

в) Перенос по таблице метода перемещений

Для этого следует исключить перемещения узла введением дополнительных связей и по таблице метода перемещений определить возникающие реакции во введенных связях (рис. 15.3 г). Если эти реакции сложить и приложить в обратном направлении (рис. 15.3 д), получим величину эквивалентной нагрузки:

$$P \frac{5}{16} ql \quad \frac{5}{16} ql \quad \frac{5}{8} ql \approx 0,625 ql .$$

Теперь сравним три варианта расчета. Конечно, вариант б) дает точный результат. Однако он сложен для реализации. Вариант а) наиболее прост, но дает неточный результат. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться вариантом в), вполне простым для использования и дающим вполне точный результат.

В качестве примера рассмотрим следующую раму (рис. 15.4 а) и выберем ее расчетную модель (рис. 15.4 б). Для переноса нагрузок P и q в двух элементах рамы в узлы расчетной модели воспользуемся таблицей метода перемещений. Соответствующие схемы показаны на рис. 15.4 в, г. Полученные реакции в обратном направлении прикладываем к узлам выбранной расчетной модели (рис. 15.4 б).

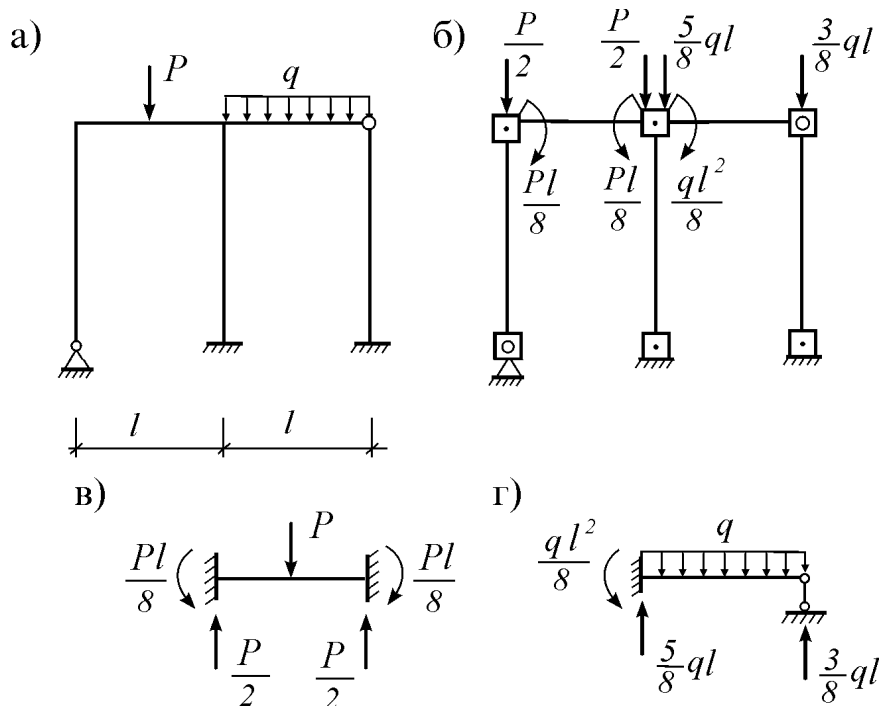


Рис. 15.4

3. Уравнения дискретного метода. Уравнение равновесия

Система уравнений, составляемая в дискретном методе, называется *полной системой уравнений строительной механики*. В нее входят три уравнения – уравнение равновесия (статики), геометрическое уравнение и физическое уравнение.

Составление уравнения равновесия основано на следующем рассуждении: если сооружение находится в равновесии, то его дискретная модель также находится в равновесии; следовательно, и отдельные элементы и узлы дискретной модели тоже находятся в равновесии.

В качестве примера рассмотрим ферму (рис. 15.5 а).

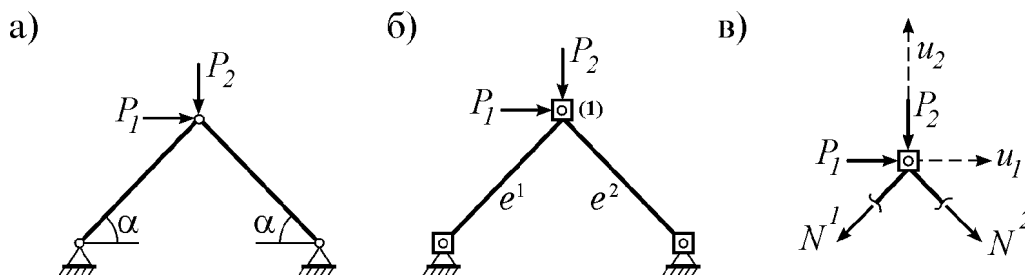


Рис. 15.5

Выберем дискретную модель фермы (рис. 15.5 б) и будем считать, что в ее элементах e^1 и e^2 возникают только продольные усилия. Поэтому, вырезав узел 1 (рис. 15.5 в), можно составить два уравнения равновесия узла как суммы проекций сил на направления перемещений узла u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned} u_1 \quad N^1 \cos \alpha \quad N^2 \cos \alpha \quad P_1 \quad 0, \\ u_2 \quad N^1 \sin \alpha \quad N^2 \sin \alpha \quad P_2 \quad 0. \end{aligned}$$

Представим эти уравнения в матричной форме

$$\begin{aligned} \cos \alpha \quad \cos \alpha \quad N^1 \quad P_1 \quad 0 \\ \sin \alpha \quad \sin \alpha \quad N^2 \quad P_2 \quad 0 \end{aligned}$$

и обозначим входящие сюда матрицы и вектора:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{S} \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \end{pmatrix}, \mathbf{P} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \mathbf{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получим матричное уравнение

$$\mathbf{AS} \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

которое называется *уравнением равновесия*, где \mathbf{A} – матрица равновесия, \mathbf{S} – вектор усилий, \mathbf{P} – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор.

По матрице \mathbf{A} можно установить некоторые особенности расчетной модели. Возможны три случая.

1. $n = m$ (\mathbf{A} – квадратная матрица размерности $n \times n$). Если определитель матрицы \mathbf{A} не равняется нулю ($\det \mathbf{A} \neq 0$), расчетная модель сооружения статически определима и геометрически неизменяема. В этом

случае усилия определяются непосредственно из уравнения равновесия:

S A¹P.

Рассмотренная нами ферма является именно такой ($n=m=2$).

2. $n < m$. В этом случае система статически неопределима, а число $m-n$ определяет степень ее статической неопределимости. Если ранг матрицы A равняется n , то такая система геометрически неизменяема.

3. $n > m$. Такая система геометрически изменяема.

В о п р о с ы

1. Какова сущность континуального подхода?
2. Что такое дискретный подход в механике?
3. Какова общая схема реализации расчета при дискретном подходе?
4. Как определяется дискретная модель стержневой системы?
5. Какой способ переноса нагрузки предпочтительнее и чем это обосновано?
6. Что такое уравнение равновесия и как оно получается?
7. Какие особенности расчетной модели можно установить по полученной матрице равновесия?

Лекция 16

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ (продолжение)

4. Геометрическое уравнение

Внешняя нагрузка приводит к деформации элементов сооружения, но при этом они не должны отрываться друг от друга. Это требование можно записать в виде уравнений совместности деформаций, отражающих геометрическую сторону задачи. Систему таких уравнений будем называть **геометрическим уравнением**.

Порядок составления геометрического уравнения изучим на примере рассмотренной в предыдущей лекции фермы (рис. 16.1 а).

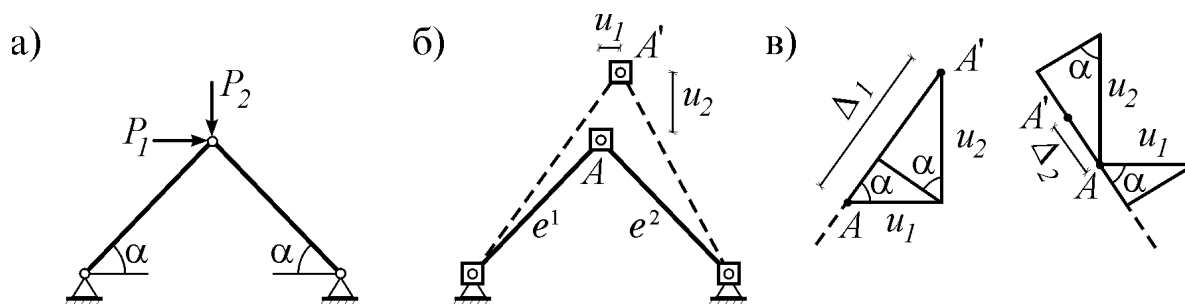


Рис. 16.1

Пусть под действием нагрузки элементы фермы получают только продольные деформации (рис. 16.1 б). Деформацию (удлинение) первого элемента e^1 можно определить по левой схеме на рис. 16.1 в:

$$\Delta_l = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha.$$

Деформация второго элемента e^2 определяется по правой схеме рис. 16.1 в:

$$\Delta_2 = -u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha$$

(из-за сжатия e^2 от перемещения u_1 первое слагаемое взято со знаком «-»).

Перепишем эти уравнения в виде

$$-\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_1 = 0,$$

$$\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_2 = 0$$

и представим в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Это матричное уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \Delta = \mathbf{0},$$

где \mathbf{u} u_1 u_2 и Δ Δ_1 Δ_2 – вектора перемещений и деформаций,

\mathbf{A}_1 $\begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{matrix}$ – связующая матрица. Кроме того, из предыдущей

лекции нам известна матрица равновесия $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$. Сравнив их

между собой видим, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^t$ (символ t означает операцию транспонирования). Это свойство позволяет переписать полученное матричное уравнение в виде

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \Delta = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Оно называется **геометрическим уравнением**.

Использование одной и той же матрицы \mathbf{A} в двух уравнениях – в уравнении статики и в геометрическом уравнении – соответствует известному в механике **принципу двойственности**.

5. Физическое уравнение

Изучим связь между деформациями и внутренними усилиями элементов расчетной модели стержневой системы.

Выбранная нами расчетная модель сооружения такова, что механические и геометрические характеристики ее отдельных элементов постоянны, а внешняя нагрузка действует только в узлах. В этом случае по нескольким конечным значениям усилий в элементах расчетной модели можно определять усилия во всех точках стержней.

В расчетных моделях плоской стержневой системы обычно встречаются три типовых элемента: 1) элемент с двумя жесткими узлами, 2) элемент с шарнирным и жестким узлами, 3) элемент с двумя шарнирными узлами. Рассмотрим их по отдельности, вводя следующие обозначения: e^r – некоторый элемент, r – номер этого элемента.

1) Элемент с двумя жесткими узлами (рис. 16.2 а). В нем продольная и поперечная силы постоянны, а Q можно выразить через конечный и начальный моменты элемента:

$$Q = \frac{M_k - M_n}{l}$$

2) Элемент с шарнирным и жестким узлами (рис. 16.2 б). В нем поперечную силу можно выразить через конечный момент: $Q = \frac{M_k}{l}$

3) Элемент с двумя шарнирными узлами (рис. 16.2 в). В нем имеется лишь постоянная продольная сила N .

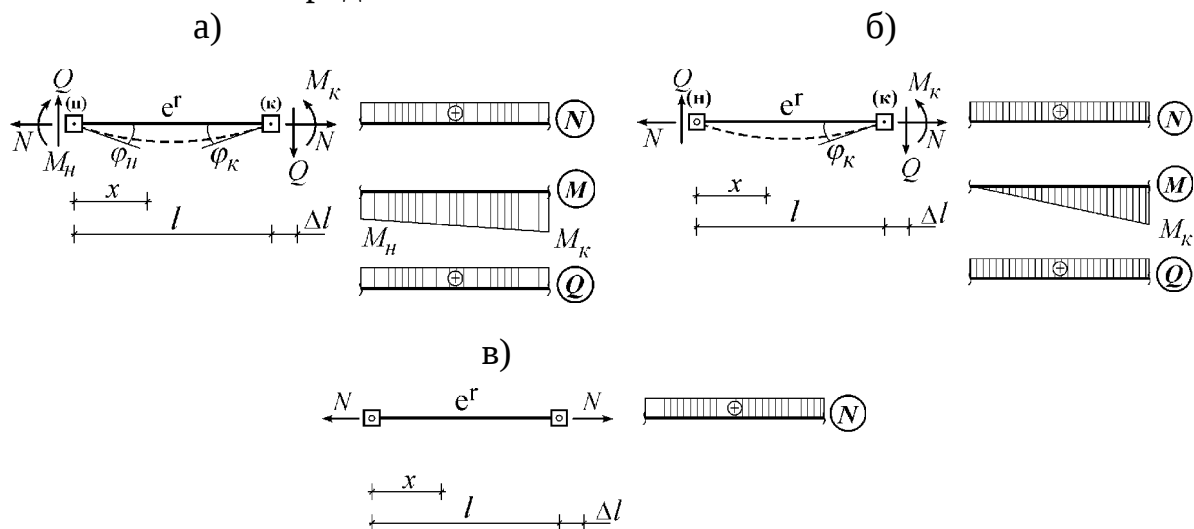


Рис. 16.2

Зависимость между внутренними усилиями и деформациями этих элементов может быть установлена через обобщенный закон Гука и записана в матричной форме

$$\Delta^r = \mathbf{B}^r \mathbf{S}^r, \quad (2)$$

где \mathbf{B}^r – матрица податливости элемента, связывающая вектор перемещений элемента Δ^r с вектором усилий \mathbf{S}^r .

Например, в элементе 1-го типа связь между компонентами векторов перемещений $\Delta^r \{ \Delta_l \ \phi_n \ \phi_k \}$ и внутренних усилий $\mathbf{S}^r \{ N \ M_n \ M_k \}$ выражается формулами (даются без вывода)

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \frac{l}{EF} N, \\ \phi_n &= \frac{l}{3EI} M_n + \frac{l}{6EI} M_k, \\ \phi_k &= \frac{l}{6EI} M_n + \frac{l}{3EI} M_k. \end{aligned}$$

Если эти уравнения записать в матричной форме (2), то матрица податливости элемента будет

$$\mathbf{B}^r = \begin{pmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{pmatrix}.$$

Для элемента второго типа имеем

$$\mathbf{S}^r = \{N, M, \phi_k\}, \quad \Delta^r = \{\Delta_l, \phi_k\}, \quad \mathbf{B}^r = \begin{pmatrix} \frac{l}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} \end{pmatrix}.$$

Для элемента третьего типа

$$\mathbf{S}^r = \{N\}, \quad \Delta^r = \{\Delta\}, \quad \mathbf{B}^r = \frac{l}{EF}.$$

Теперь рассмотрим полную дискретную модель сооружения как системы, состоящей из m элементов e^1, e^2, \dots, e^m . Для всех этих элементов

можно записать уравнения (2), связывающие вектора деформаций элементов $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^m$ с векторами усилий S^1, S^2, \dots, S^m . Если объединить все эти уравнения в общую систему, а вектора деформаций и усилий отдельных элементов объединить в вектора $S = S^1, S^2, \dots, S^m$

и $\Delta = \Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^m$, то полученную систему уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\Delta = \mathbf{B}S.$$

Оно устанавливает связь между деформациями и усилиями расчетной модели и называется **физическим уравнением**, а матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}^m \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{B}^m \end{pmatrix}$$

называется **матрицей податливости** системы. Здесь знак \square означает диагональность матрицы.

6. Решение полной системы уравнений

Итак, при расчете НДС плоской стержневой системы дискретным

методом участвуют четыре вектора:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{P} & P_1 \dots P_n \quad - \text{вектор нагрузки;} \\
 \mathbf{u} & u_1 \dots u_n \quad - \text{вектор перемещений;} \\
 \Delta^1 & S^1 \Delta \dots S^m \Delta \quad - \text{вектор усилий;} \\
 & \Delta^2 \dots \quad - \text{вектор деформаций.}
 \end{array}$$

Между этими векторами имеется три зависимости:

$$\mathbf{AS} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad - \text{уравнение равновесия;} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} = \Delta \quad - \text{геометрическое уравнение;} \quad (4)$$

$$\Delta = \mathbf{BS} \quad - \text{физическое уравнение.} \quad (5)$$

Уравнения (3)-(5) объединяются в общую систему уравнений и называются *полной системой уравнений строительной механики*. Ее решение дает полную картину НДС всего сооружения.

Систему уравнений (3)-(5) с тремя неизвестными \mathbf{S} , \mathbf{u} , Δ можно решать тремя способами.

а) Решение в смешанной форме

Для этого правую часть уравнения (5) нужно подставить вместо Δ в уравнение (4). Тогда останутся два уравнения:

$$\mathbf{AS} = \mathbf{P}, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} = \mathbf{BS}. \quad (7)$$

Объединим их в одно матричное уравнение:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{P} \\
 \mathbf{B} & \mathbf{A}^t & \mathbf{u} & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Из его решения определяются искомые внутренние усилия и деформации сооружения:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{S} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \\
 \mathbf{u} & \mathbf{B} & \mathbf{A}^t & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Однако, из-за большой размерности обращаемой матрицы и ее несимметричности, расчет этим способом сложен для реализации.

б) Решение в перемещениях

Для этого из (7) найдем усилия:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{u} = -\mathbf{KA}^t \mathbf{u}, \quad (8)$$

где обратная к \mathbf{B} матрица $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ называется *матрицей жесткости*.

Теперь подставим (8) в (6) и получим

$$\mathbf{AKA}^t \mathbf{u} = \mathbf{P}.$$

Из него определяется вектор перемещений

$$\mathbf{u} = (\mathbf{AKA}^t)^{-1} \mathbf{P}.$$

Если этот результат подставить в (8), то определяются и усилия.

в) Решение в усилиях

Из-за сложности решения рассматривать его не будем.

Алгоритм дискретного метода

Порядок расчета по способу б) определяется так:

1. Ввести в расчетную схему узлы и выбрать расчетную модель.
2. Составить вектор узловых перемещений \mathbf{u} и вектор нагрузки \mathbf{P} .
3. Составить вектора неизвестных усилий \mathbf{S} и деформаций Δ .
4. Перенести внешнюю нагрузку в узлы.
5. Вырезая узлы, записать уравнения равновесия.
6. Собрать матрицу равновесия \mathbf{A} и вектор нагрузки \mathbf{P} .
7. Составить матрицы податливости отдельных элементов \mathbf{V}^T и собрать из них матрицу податливости необъединенных элементов \mathbf{V} .
8. Решить полную систему уравнений строительной механики. Решение в перемещениях ведется в следующей последовательности:

- а) $\mathbf{K} = \mathbf{V}^T$;
- б) $\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{A}^T$;
- в) $\mathbf{K}_0 = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^T + \mathbf{C}$;
- г) $\mathbf{V}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}$;
- д) $\mathbf{u} = \mathbf{V}_0\mathbf{P}$;
- е) $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{u}$;
- ж) $\Delta = \mathbf{B}\mathbf{S}$.

9. По вектору усилий \mathbf{S} построить эпюры M , Q , N .

При необходимости по векторам \mathbf{u} и Δ можно получить общую картину деформации сооружения.

В о п р о с ы

1. Какой физический смысл имеет геометрическое уравнение?
2. В чем заключается принцип двойственности?
3. Какие типовые элементы рассматриваются в плоской стержневой системе?
4. Как составляются физические уравнения?
5. Что такое матрица податливости элемента?
6. Какими способами решается полная система уравнений?
7. Из каких этапов состоит алгоритм дискретного метода?

Лекция 17

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1. Внутренние усилия пространственных систем

Все сооружения являются пространственными, и на них действуют нагрузки, лежащие в разных плоскостях. Поэтому и расчетные схемы сооружений должны быть пространственными.

Как известно, в плоских стержневых системах есть три внутренних усилия M , Q , N (рис. 17.1 а). В пространственных стержневых системах

таких усилий шесть: изгибающие моменты M_y M_z , крутящий момент и

M_x N , поперечные силы Q_y и Q_z , продольная сила N (рис. 17.1 б).

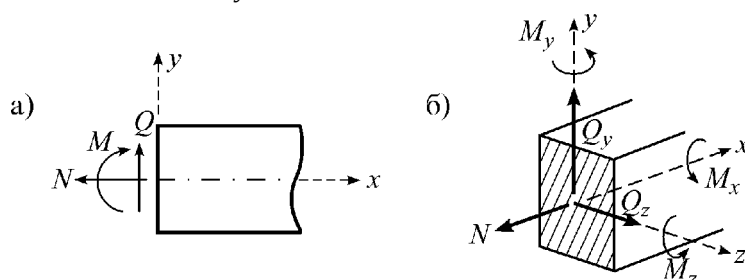


Рис. 17.1

2. Опоры пространственных систем и их реакции

Пространственные системы опираются на пространственные опоры со своими кинематическими и статическими свойствами. Обычно связи опор считаются жесткими, с нулевыми перемещениями по их направлениям. При определении опорных реакций используются уравнения равновесия.

В отличие от плоских систем, опоры пространственных систем могут быть 15 типов. Из них рассмотрим четыре типа опор.

1. **Шаровая подвижная опора** (рис. 17.2 а). На рисунке изображается как шарик, свободно качающийся между опорной плоскостью и элементом конструкции, а в расчетной схеме – как одна вертикальная связь. У этой опоры имеется пять степеней свободы – она дает возможность поступательных перемещений в двух и поворотов в трех направлениях. В ней возникает только одна опорная реакция R_y .

2. **Шаровая опора на цилиндрических катках** (рис. 17.2 б). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, один из которых жестко связан с элементом конструкции, а другой находится на цилиндрических катках. В расчетной схеме изображается двумя связями. У этой опоры имеется четыре степени свободы – одно поступательное перемещение и три поворота. В ней возникают две реакции R_y и R_z .

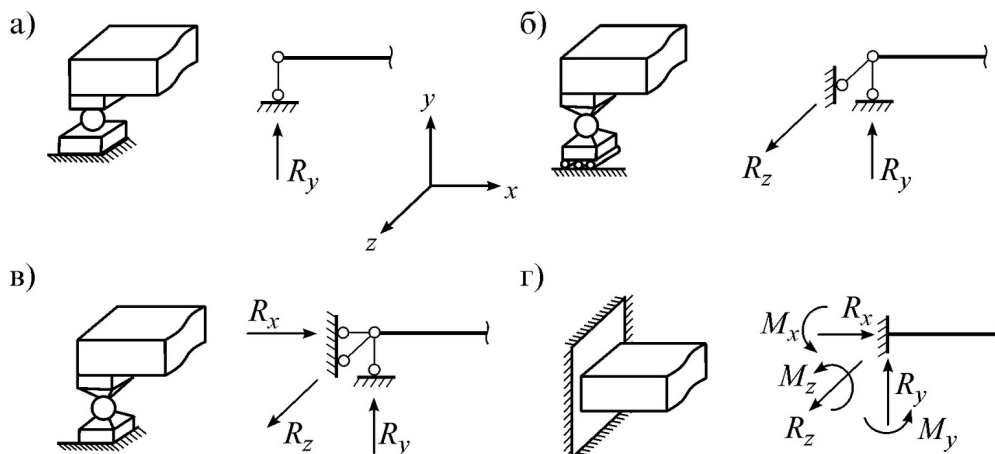


Рис. 17.2

3. **Шаровая неподвижная опора** (рис. 17.2 в). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, жестко связанными с элементом конструкции и основанием, а в расчетной схеме - в виде трех связей. У этой опоры есть три степени свободы – возможность поворота в трех направлениях. В ней возникают три реакции R_x, R_y, R_z .

4. **Заделка** (рис. 17.2 г). На рисунке она изображается как заделанный брус (или стержень), а в расчетной схеме как обычная заделка. У заделки степеней свободы нет. В ней возникают три реакции R_x, R_y, R_z и три реактивных момента M_x, M_y, M_z .

Кроме рассмотренных здесь, еще имеется 11 различных опор.

Реакции статически определимых пространственных систем определяются из шести уравнений равновесия. Имеется четыре варианта записи этих уравнений, из которых рассмотрим только два:

$$1. \sum X=0; \sum Y=0; \sum Z=0; \sum M_x=0; \sum M_y=0; \sum M_z=0.$$

Здесь $\sum X, \sum Y, \sum Z$ – суммы проекций на три оси x, y, z , которые не должны лежать в одной плоскости и быть параллельными; суммы моментов не обязательно составлять относительно тех же осей.

$$2. \sum M_1=0; \sum M_2=0; \sum M_3=0; \sum M_4=0; \sum M_5=0; \sum M_6=0.$$

Здесь $1, 2, \dots, 6$ – шесть любых осей в пространстве. Но:

- эти оси не должны пересекать одну прямую;
- число параллельных осей не должно быть больше трех;
- если три оси пересекаются в одной точке, остальные три не должны быть параллельными.

3. Кинематический анализ пространственных систем

Как известно, расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. Многие условия и выводы, полученные при кинематическом анализе плоских систем, применимы и при анализе пространственных систем. Однако их недостаточно. Потому при анализе пространственных систем вводятся новые понятия и рассматриваются новые способы анализа их геометрической неизменяемости.

Любую геометрически неизменяемую часть пространственной системы будем называть **телом**. Тело без связей имеет шесть степеней свободы – три независимых поступательных перемещения и три поворота. Следовательно, для исключения этих степеней свободы тело нужно закреплять как минимум шестью связями.

Простейший способ закрепления тела к земле показан на рис. 17.3 а, где имеется три типа опор – шаровая подвижная опора А, шаровая опора на цилиндрических катках В и шаровая неподвижная опора С. Из них опора С исключает три поступательных перемещения тела, опора В – два поворота и опора А – один поворот.

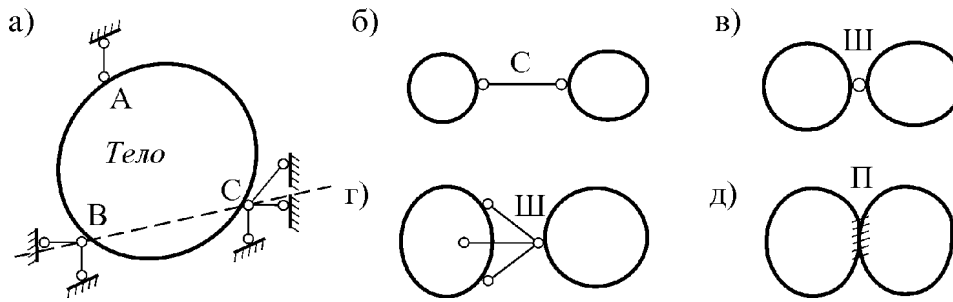


Рис. 17.3

Связи, соединяющие два тела, могут быть разными. Простейшая связь в виде стержня (С) показана на рис. 17.3 б. Если же два тела соединяются шаровым шарниром (рис. 17.3 в), то это соединение эквивалентно трем связям (рис. 17.3 г). Припайка, жестко связывающая два тела (рис. 17.3 д), эквивалентна шести связям.

Если в пространственной системе имеется n_T тел, $n_{Ш}$ шаровых шарниров, n_C стержней, n_{C_0} опорных связей и $n_{П}$ припаяек, то число степеней свободы такой системы определяется по формуле

$$W = 6n_T - 3n_{Ш} - n_C - n_{C_0} - 6n_{П}.$$

Как и для плоской системы, для геометрической неизменяемости пространственной системы необходимо выполнение условия $W \leq 0$.

4. Расчет пространственных ферм

Расчет пространственных систем намного сложнее расчета плоских систем. Поэтому изучим только основы расчета ферм.

Кинематический анализ такой фермы проводится по формуле

$$W = 3n_y - n_C - n_{C_0},$$

где n_y – число узлов фермы.

Требование $W \leq 0$ является необходимым условием геометрической неизменяемости фермы. Для статической определимости необходимо выполнение условия $W = 0$. Но, как известно, количественного анализа недостаточно, следует проводить и качественный анализ. Для этого можно использовать принципы образования геометрически неизменяемых пространственных систем. Например, простейшим принципом является присоединение к телу триады (шарового шарнира с тремя связями). При его использовании вначале в ферме выделяют простейшее геометрически неизменяемое тело – треугольную пирамиду. Затем к нему последовательно присоединяют отдельные триады.

Геометрическую неизменяемость пространственной системы можно проверять и методом нулевой нагрузки: *если при расчете системы без нагрузки усилия во всех стержнях и опорные реакции окажутся равными нулю, то система неизменяема; если же возникает неопределенность типа 0/0, система мгновенно изменяема.*

Изучим два метода расчета пространственных ферм.

Метод сечений применяется при расчете ферм с простейшим образованием. Имеется два его варианта.

а) Метод вырезания узлов. Основан на последовательном вырезании узлов фермы, в которых число неизвестных усилий не более трех. Составляются три уравнения проекций на три оси:

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0.$$

Эти оси не должны быть параллельными одной плоскости.

На этом методе основан признак определения нулевых стержней (стержней, усилия в которых равны нулю): *если узел с тремя пересекающимися стержнями не нагружен, то усилия во всех трех стержнях равны нулю.*

б) Метод моментной оси. Сущность метода: через ферму проводится сквозное сечение, затем составляется и решается уравнение момента относительно некоторой оси.

Ось, для которой составляется уравнение момента, называется **моментной осью**. Эта ось выбирается так, чтобы в уравнение вошла только одна неизвестная.

Метод разложения на плоские фермы. Когда стержни фермы располагаются группами на нескольких плоскостях, этот метод дает большой выигрыш в расчетах. Метод основан на следующей теореме: *если силы, действующие на пространственную ферму, лежат в одной плоскости, то усилия во всех стержнях фермы, лежащих вне этой плоскости, равны нулю.*

Порядок расчета фермы по этому методу состоит в следующем: внешняя нагрузка разлагается на несколько плоскостей; части фермы, лежащие в разных плоскостях, рассчитываются только на нагрузку в своей плоскости; затем применяется принцип суперпозиции.

Например, на следующую ферму (рис. 17.4 а) нагрузка действует только в двух плоскостях. Следовательно, ее расчет можно свести к расчету только двух плоских ферм (рис. 17.4 б, в). В стержнях фермы, лежащих на третьей боковой плоскости (рис. 17.4 г), все усилия равны нулю.

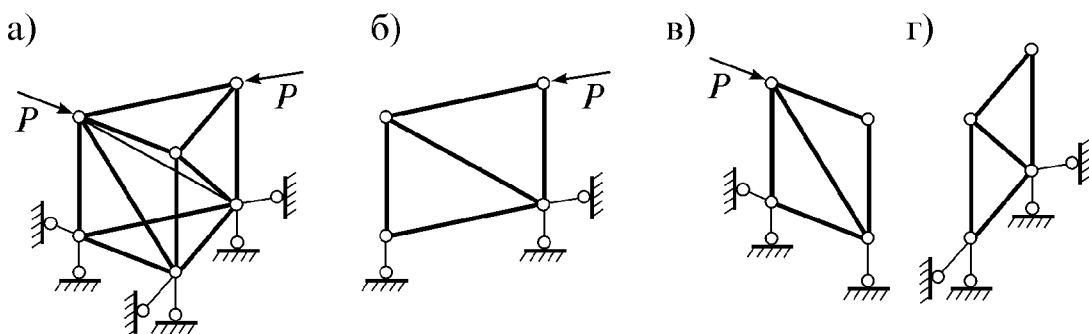


Рис. 17.4

5. Определение перемещений пространственных систем

В пространственных стержневых системах в общем случае могут возникать шесть внутренних усилий. Поэтому формула вычисления перемещений содержит шесть компонент:

$$\Delta_P = \int_0^L \left[\frac{M_{Py}}{EI_y} + \frac{M_{Pz}}{EI_z} + \frac{H_P}{EI_K} + \frac{Q_{Py}}{GF} + \frac{Q_{Pz}}{GF} + \frac{N_P}{EF} \right] dx,$$

где индексом P обозначены усилия грузового состояния: M_{Py}, M_{Pz}, H_P – два изгибающих и крутящий моменты, Q_{Py}, Q_{Pz} – две поперечные и N_P – продольная силы; надчеркиванием обозначены соответствующие усилия единичного состояния;

I_y, I_z, I_K – моменты инерции относительно осей y, z состояния; μ_y, μ_z – коэффициенты формы сечения.

и полярный момент инерции;

Определение перемещений по этой формуле проводится, как и при определении перемещений плоских стержневых систем. В пространственных рамах влиянием продольных и поперечных сил обычно пренебрегают и учитывают только первые три члена этой формулы, а в фермах учитывается только последний член.

6. Расчет пространственных рам методом сил

Степень статической неопределимости пространственной рамы определяется по формуле

$$n - 6n_k - n_{уд},$$

где n_k – число замкнутых контуров, $n_{уд}$ – число удаленных связей.

Для ферм используется другая формула:

$$n - n_C - n_{C_0} - 3n_y,$$

где n_C – число стержней, n_{C_0} – число опорных связей, n_y – число узлов.

Основная система и канонические уравнения метода сил имеют тот же смысл и вид, как и для плоских рам. Но входящие в них коэффициенты определяются с учетом изгибающих моментов в двух плоскостях и крутящего момента в каждом элементе рамы.

Построение промежуточных и окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка такие же, как и при расчете плоских рам.

В о п р о с ы

1. Какие усилия возникают в пространственных стержневых системах?
2. Чем отличается кинематический анализ пространственных систем от

кинематического анализа плоских систем?

3. Какие методы используются при расчете пространственных ферм?

4. Какие особенности имеют определение перемещений и расчет методом сил пространственных систем по сравнению с плоскими?

Лекция 18

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Современная вычислительная техника позволяет проводить расчеты сооружений с более подробным описанием их внутренней структуры и с более точным учетом действующих нагрузок. Для этого разработаны специальные методы расчета, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ).

1. Понятие о методе конечных элементов

Метод конечных элементов – это метод расчета сооружений, основанный на рассмотрении сооружения как совокупности типовых элементов, называемых **конечными элементами (КЭ)**.

В дискретном методе мы рассмотрели три типовых стержневых элемента, которые используются и в МКЭ как конечные элементы. Например, элемент 3-его типа в МКЭ называется ферменным (рис. 18.1 а), а 1-го типа – плоским стержневым конечным элементом (рис. 18.1 б). При расчете пространственных рам используется КЭ бруса (рис. 18.1 в). В расчетах плоских тел (плит или пластин) используются треугольный (рис. 18.1 г) или четырехугольный (рис. 18.1 д) конечные элементы. При расчете пространственных сооружений могут использоваться призматический КЭ (рис. 18.1 е) или тетраэдрический КЭ (рис. 18.1 ж) и др. Для расчета различных сооружений разработано множество других КЭ.

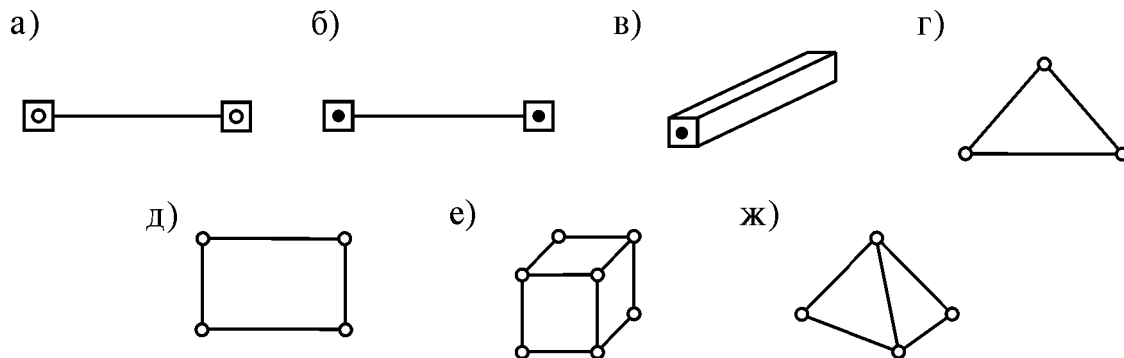


Рис. 18.1

МКЭ – дискретный метод. В этом методе сооружение делится на определенное число КЭ, соединенных между собой в узлах конечно-элементной модели. А нагрузка, действующая на сооружение, переносится в узлы. Это позволяет определять НДС сооружения через узловые усилия и перемещения конечно-элементной модели.

Как мы знаем, можно выбирать разные расчетные схемы сооружения. Но и в пределах одной расчетной схемы можно выбирать разные расчетные модели по МКЭ, потому что сооружение можно разбить не

только на разное количество одностипных КЭ, но и представить его как комбинацию различных типов КЭ. С другой стороны, при расчете сооружения могут быть реализованы различные варианты МКЭ в формах метода сил, метода перемещений и смешанного метода. В настоящее время широкое распространение получил МКЭ в форме метода перемещений.

2. Вариационные основы МКЭ

При решении многих задач статики, динамики и устойчивости сооружений определяется их *полная потенциальная энергия* U :

$$U = W - V. \quad (1)$$

Здесь W – работа внешних сил, V – работа внутренних сил. Обычно все они представляются в виде функций, зависящих от перемещений, деформаций, напряжений элементов расчетной модели сооружения.

Исследование этого выражения позволяет выявить важные законы механики, называемые принципами. Например, существует принцип Лагранжа-Дирихле: *для того чтобы механическая система находилась в равновесии, ее полная потенциальная энергия должна быть постоянной*. Из этого принципа следует, что приращение полной потенциальной энергии системы, находящейся в равновесии, должно равняться нулю:

$$\Delta U = 0.$$

Вычисление приращения функции обычно заменяется вычислением его приближенного значения – дифференциала. В результате этого получается *вариационное уравнение Лагранжа*

$$\delta U = 0,$$

где символ δ означает вариацию, вычисление которого схоже с вычислением дифференциала функции. Тогда последнее уравнение формулируется как **принцип Лагранжа**: *для равновесия системы необходимо, чтобы вариация работы ее сил на возможных перемещениях равнялась нулю*.

Принцип Лагранжа позволяет свести задачу определения НДС сооружения к отысканию экстремума полной потенциальной энергии.

С учетом (1), принцип Лагранжа принимает вид

$$\delta V = \delta W.$$

Принцип Лагранжа используется для сведения континуальной задачи расчета сооружений к дискретной задаче путем аппроксимации (приближенного определения) непрерывных полей перемещений, деформаций, напряжений внутри конечного элемента по его узловым перемещениям.

В строительной механике используются и другие вариационные принципы, такие как принципы Кастильяно, Рейсснера, Ху-Вашицу и др. Однако мы будем пользоваться только вариационным принципом Лагранжа как основы варианта МКЭ в форме метода перемещений.

3. Аппроксимация конечного элемента

Имея КЭ разного типа, при выборе конечно-элементной модели сооружения можно вводить узлы с разным числом степеней свободы. Например, в плоской системе могут рассматриваться узлы как с тремя степенями свободы (рис. 18.2 а), так и с двумя (рис. 18.2 б) или даже с одной степенью свободы. В первом случае учитываются два линейных (поступательных) и одно угловое перемещение узла, во втором – два линейных перемещения, а в третьем – лишь одно поступательное перемещение. В пространственной системе узлы могут иметь шесть (рис. 18.2 в) или три степени свободы (рис. 18.2 г).

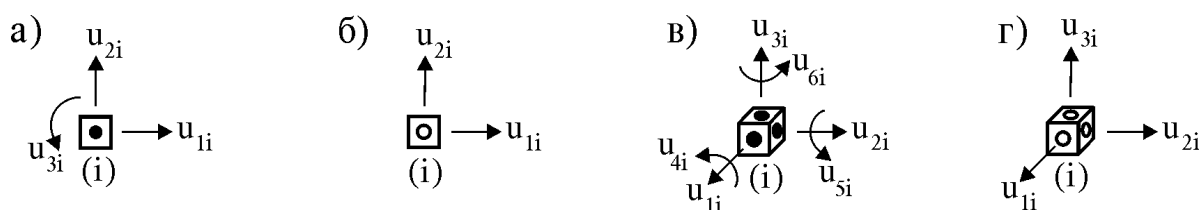


Рис. 18.2

Для упорядочения степеней свободы и соответствующих перемещений узлов КЭ все они нумеруются в определенном порядке и собираются в общий вектор перемещений \mathbf{u} .

Чтобы воспользоваться принципом Лагранжа, вводятся так называемые **координатные функции**, аппроксимирующие непрерывное поле перемещений внутри КЭ через перемещения ее узлов:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}.$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещений внутренних точек КЭ, \mathbf{C} – матрица координатных функций, $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор коэффициентов. Элементы матрицы \mathbf{C}

выбираются в виде полиномов, непрерывных внутри КЭ. Если в полиноме учитывается минимальное число членов, то такой КЭ называется **симплекс-элементом**. При учете большего числа членов полинома, КЭ называется **комплекс-элементом**.

В качестве примера рассмотрим простейший ферменный КЭ с узлами i и j (рис. 18.3 а) в местной системе координат \tilde{x} . Его узлы имеют по одной поступательной степени свободы по оси \tilde{x} и соответствующие им узловые

перемещения u_i и u_j . Допустим, что в узлах КЭ действуют силы P_{i_i} P_{i_j} (рис. 18.3 б).

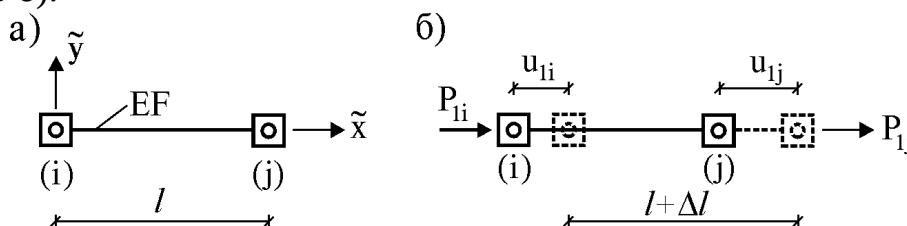


Рис. 18.3

Перемещения внутренних точек элемента будем аппроксимировать \tilde{x} полиномом первой степени

$$\tilde{u} = u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Запишем его в матричной форме:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha},$$

где $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}$ – матрица координатных функций, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ – вектор

неизвестных коэффициентов.

Подставив $x=0$ и $x=l$ в наш полином, получим два равенства:

$$u(0) = \alpha_1, \quad u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l.$$

С другой стороны, $u(0) = u_{1i}$ и $u(l) = u_{1j}$ (рис. 18.3 б). Учитывая их,

предыдущие равенства перепишем так:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \alpha_1, \\ u_{1j} &= \alpha_1 + \alpha_2 l. \end{aligned}$$

Тогда их можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}$$

и представить как матричное уравнение

$$\mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\alpha},$$

связывающее вектор узловых перемещений $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}$ и вектор

координат $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ через матрицу $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}$.

Определим вектор $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \Phi^{-1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{u} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}$$

или

$$\tilde{u} = \mathbf{H} \mathbf{u}.$$

Входящая сюда матрица \mathbf{H}

\tilde{x}
 — $1 \times l$ называется *матрицей форм*. Она
 позволяет аппроксимировать поле перемещений внутренних точек КЭ
 через перемещения узлов.

По аналогии с перемещениями, поле внутренних усилий \mathbf{P} в КЭ

также можно аппроксимировать через вектор узловых сил \mathbf{P} по формуле

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{H} \mathbf{P}.$$

Например, для рассмотренного КЭ имеет место зависимость

$$\mathbf{P} \approx \begin{bmatrix} 1 & x \\ \Gamma & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

В о п р о с ы

1. Какой из подходов механики реализуется в МКЭ?
2. Какие основные типы КЭ используются в МКЭ?
3. Как формулируется принцип Лагранжа?
4. Для чего используются координатные функции?
5. Что такое матрица форм?

Лекция 19

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МКЭ (продолжение 1)

4. Матрица жесткости КЭ

Известные в механике геометрические и физические соотношения для континуальных систем можно записать в виде, аналогичном рассмотренным ранее уравнениям дискретного подхода. Например,

для дискретной системы: для континуальной системы:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} \mathbf{u}, & & \epsilon \approx \mathbf{A} \mathbf{u}, \\ \Delta \mathbf{B} \mathbf{S}, & & \epsilon \approx \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

Здесь ϵ и $\boldsymbol{\sigma}$ – вектора деформаций и напряжений, а \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы равновесия и податливости континуальной системы. В отличие от дискретного подхода, уравнения континуального подхода удовлетворяются во всех точках системы.

При рассмотрении конечного элемента как континуальной системы принцип Лагранжа $\delta V = \delta W$ можно записать в виде

$$\delta \int_V \boldsymbol{\epsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \int_V \mathbf{u}^t \mathbf{P} dV,$$

где левая и правая части представляют возможные работы внутренних и внешних сил, а интегрирование ведется по объему КЭ V .

После этого осуществляется переход к дискретной модели КЭ с использованием матрицы форм \mathbf{H} . Тогда, после ряда преобразований, получается матричное уравнение, связывающее вектор узловых перемещений \mathbf{u} с вектором узловых усилий \mathbf{P} КЭ

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P},$$

в которой симметричная квадратная матрица

$$\int_V \mathbf{K} \mathbf{H}^t \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{H} dV$$

называется **матрицей жесткости конечного элемента**. Физический смысл элемента k_{ij} этой матрицы – это реакция, возникающая в i -ом направлении от заданного единичного перемещения в j -ом направлении.

Рассмотрим примеры получения матриц жесткостей некоторых КЭ.

а) Матрица жесткости ферменного элемента

В рассматриваемом одноосном напряженном состоянии (рис. 18.3) связь между деформациями и перемещениями КЭ будет $\epsilon \sim du(x)/dx$. Сравнив его с матричным уравнением $\epsilon \sim \mathbf{A}^t \mathbf{u}$ видим, что матрица равновесия является дифференциальным оператором с одним членом, т.е. $\mathbf{A}^t = d/dx$. Тогда, из уравнения связи между деформацией и напряжением

$$\epsilon \sim \frac{1}{E} \sigma \text{ следует, что матрица податливости будет } \mathbf{B} = \frac{1}{E}$$

Для определения матрицы жесткости КЭ вычислим

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{H}^t \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{H} dV = \int_0^l \mathbf{H}^t \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{H} F dx$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix}$$

В данном случае интегрирование по объему V сводится к интегрированию по длине l КЭ, т.к. $dV = F dx$ (F – площадь сечения КЭ).

С учетом этого, получаем окончательную матрицу жесткости элемента:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix}$$

б) Матрица жесткости КЭ плоского бруса

Рассмотрим конечный элемент бруса с постоянной площадью поперечного сечения F и моментом инерции I в некоторой местной системе координат $\tilde{x} O \tilde{y}$ (рис. 19.1 а).

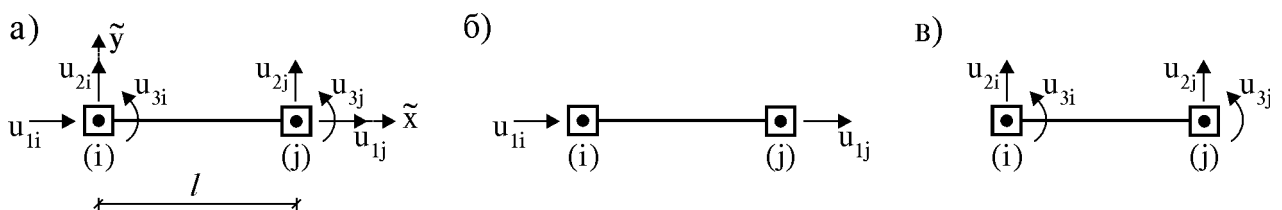


Рис. 19.1

Вектор узловых перемещений бруса определим так:

$$\mathbf{u} = \{u_{1i} \quad u_{2i} \quad u_{3i} \quad u_{1j} \quad u_{2j} \quad u_{3j}\}.$$

Если не учитывать поперечную деформацию (сдвиг), деформацию элемента можно представить как сумму двух деформаций – растяжения (рис. 19.1 б) и изгиба (рис. 19.1 в). Первая деформация рассматривалась при изучении ферменного элемента. Поэтому изучим только случай чистого изгиба элемента.

В этом случае вектор узловых перемещений элемента будет короче:

$$\mathbf{u} \{ u_{2i} \ u_{3i} \ u_{2j} \ u_{3j} \}.$$

Перемещения внутренних точек элемента будем аппроксимировать полиномом третьей степени

$$y(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3.$$

Четыре коэффициента полинома определим по граничным условиям. Например, в левом конце элемента при $x = 0$ имеем $y(0) = \alpha_1 = u_{2i}$, $y'(0) = \alpha_2 = u_{3i}$. Еще два условия имеют место для правого конца.

В результате достаточно длинной цепочки выкладок получим матрицу форм \mathbf{H} , аппроксимирующую внутренние перемещения \mathbf{u} конечного элемента через вектор узловых перемещений \mathbf{u} :

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \end{matrix}.$$

Компоненты этой матрицы – функции третьей степени. К примеру,

$$2 H_{11} = \frac{1}{6} \frac{x^3}{l^3}.$$

Не приводя достаточно сложных вычислений, приведем лишь матрицу податливости изгибного элемента

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6EI} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

и ее матрицу жесткости

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} 12 & 6l & 12l^2 & 6l \\ 6l & 4 & 6l & 2 \\ 12l^2 & 6l & 12 & 6l \\ 6l & 2 & 6l & 4 \end{matrix}.$$

Теперь определим полную матрицу конечного элемента бруса. Для этого следует объединить узловые перемещения ферменного элемента u_{1i}, u_{1j} и узловые перемещения изгибного элемента $u_{2i}, u_{3i}, u_{2j}, u_{3j}$ в вектор узловых перемещений элемента бруса $\mathbf{u} \{ u_{1i} \ u_{2i} \ u_{3i} \ u_{1j} \ u_{2j} \ u_{3j} \}$

согласно рис. 19.1. Это приводит к объединению матриц жесткостей ферменного элемента и элемента бруса. В результате получается

окончательная матрица конечного элемента бруса:

$$H_1 = \frac{1}{F} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad F = 4ab \text{ – площадь прямоугольника.}$$

Окончательная матрица жесткости конечного элемента получается в виде квадратной матрицы размерами 8 8. Для наглядности ее лучше представить в блочном виде с блоками одинакового размера 2 2:

$$\mathbf{K} = \frac{Et}{kl^2(1-\mu^2)} \begin{pmatrix}
 \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} & \mathbf{K}_{im} \\
 \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk} & \mathbf{K}_{jm} \\
 \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{km} \\
 \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mj} & \mathbf{K}_{mk} & \mathbf{K}_{mm}
 \end{pmatrix}$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона материала КЭ. Элементы каждого блока матрицы определяются по разным формулам. Например,

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{pmatrix}
 \frac{4a}{b} & 2(1-\mu) & 0 & 0 \\
 2(1-\mu) & \frac{4b}{a} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1,5(1-\mu) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1,5(1-\mu)
 \end{pmatrix}$$

Вопросы

1. Что такое ферменный элемент?
2. Чему равна матрица жесткости ферменного элемента?
3. Какие упрощения приняты при определении матрицы жесткости КЭ бруса?
4. Сколько узловых перемещений имеет прямоугольный конечный элемент?

Лекция 20

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МКЭ (продолжение 2)

5. Перенос нагрузки в узлы

В расчетной модели сооружения по МКЭ нагрузка должна быть приложена только в узлах. Поэтому действующую на систему внеузловую нагрузку необходимо переносить в узлы.

Порядок переноса нагрузки в узлы расчетной модели в простых случаях остается таким же, как и ранее. Например, в стержневых системах используется таблица метода перемещений.

Если к прямоугольному КЭ приложена изменяющаяся по линейному закону распределенная нагрузка (рис. 20.1 а), то узловые силы (рис. 20.1 б) определяются по формулам

$$P_k = \frac{q_1 l}{2} + \frac{q_2 l}{3}, \quad P_m = \frac{l}{3} \left(\frac{1}{3} q_1 + \frac{2}{3} q_2 \right)$$

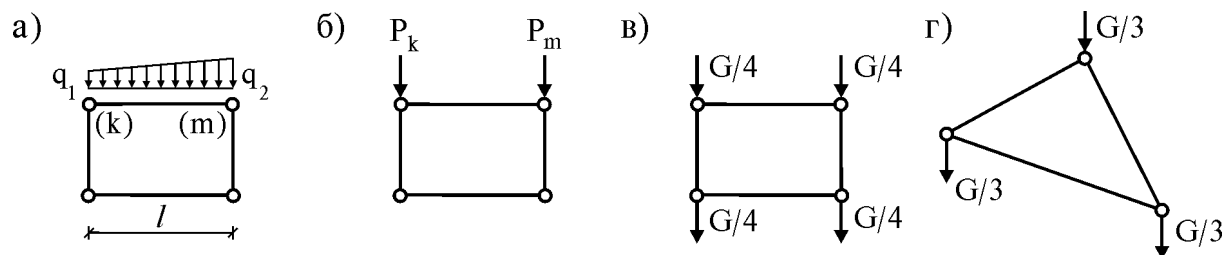


Рис. 20.1

При переносе объемной нагрузки, например собственного веса четырехугольного КЭ, в каждый узел нужно прикладывать четвертую часть его веса G (рис. 20.1 в). При переносе собственного веса треугольного КЭ в каждый узел прикладывается его третья часть (рис. 20.1 г).

В общем случае вектор узловой нагрузки определяется по формуле

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}^T dV.$$

6. Переход к общей системе координат

Каждый КЭ в МКЭ вначале рассматривается в местной системе координат. Затем осуществляется переход к глобальной (общей) системе координат. Рассмотрим порядок такого перехода.

Пусть некоторый узел i в местной системе координат \bar{x} - \bar{y} имеет перемещения $\bar{u}_{1i}, \bar{u}_{2i}, \bar{u}_{3i}$, которые следует преобразовать в перемещения узла u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} в общей системе координат x - y (рис. 20.2 а).

Поворот координатных осей осуществляется с помощью **матрицы преобразования координат**. Для плоской системы она имеет вид

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

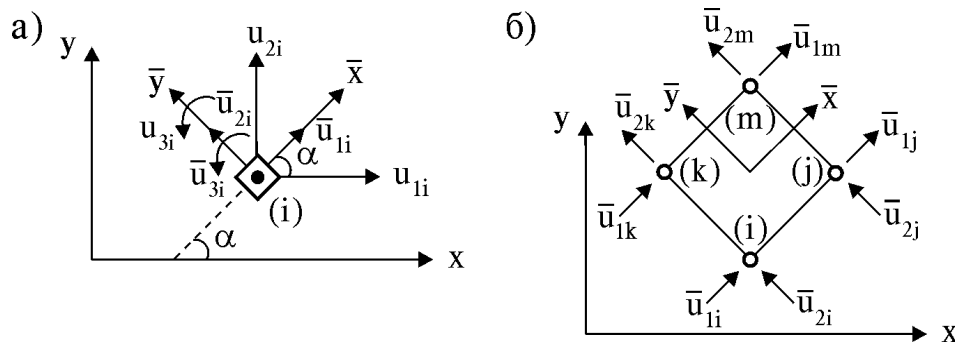


Рис. 20.2

Если координатные системы ортогональны и поворот осуществляется на угол α , то

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для шарнирного узла с двумя степенями свободы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эти матрицы позволяют использовать матрицы и вектора геометрических и жесткостных характеристик КЭ, полученных в местной системе координат, при получении соответствующих характеристик КЭ в общей системе координат. Например, преобразование вектора координат прямоугольного КЭ с четырьмя шарнирными узлами $i-j-k-m$ (рис. 20.2 б), рассмотренного в местной системе координат x^*-y^* , в общую систему координат $x-y$ осуществляет матрица

$$L = \begin{pmatrix} L_i & & & 0 \\ & L_j & & \\ & & L_k & \\ 0 & & & L_m \end{pmatrix}.$$

Блоки L_i, L_j, L_k, L_m этой матрицы имеют вид (1). Имея матрицу

жесткости КЭ в местной системе координат, можно определять ее K^*

матрицу жесткости в общей системе координат по формуле

$$K = L^t K^* L.$$

7. Объединение конечных элементов

Пусть в расчетной модели сооружения имеется m КЭ и n узлов, а вектора ее перемещений и узловых нагрузок определены так:

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_i \cup \dots \cup u_n, \\ P &= P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_i \cup \dots \cup P_n. \end{aligned}$$

После построения матриц жесткостей всех конечных элементов K^1, K^2, \dots, K^m и определения векторов узловых нагрузок P^1, P^2, \dots, P^m в общей системе координат следует сформировать матрицу жесткости и вектор нагрузки всего сооружения. Это можно сделать так.

Вначале матрицы жесткости всех КЭов собираются в единую диагональную матрицу \overline{K} , а вектора узловых нагрузок – в единый вектор \overline{P} :

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} K^1 & & & 0 & & \\ & K^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & K^m & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}, \quad \overline{P} = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ \vdots \\ P^m \end{pmatrix}.$$

Они еще не учитывают связи между соседними конечными элементами в узлах их примыкания.

Для объединения КЭов в единую систему используется

энергетический принцип: энергия конечно-элементной модели системы равняется сумме энергий всех ее КЭ. В этом случае матрица жесткости

объединенной системы будет определяться по формуле

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma}^t \overline{\mathbf{K}} \mathbf{\Gamma} ,$$

где $\mathbf{\Gamma}$ – объединяющая матрица. Элементы этой матрицы состоят только из нулей и единиц, а отдельные ее блоки соответствуют узлам КЭ и строятся по принципу: если КЭ содержит данный узел, то записывается единичная матрица, если нет – нулевая матрица. А соответствующие узловые нагрузки будут объединяться по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Gamma}^t \overline{\mathbf{P}} .$$

Однако получение матрицы жесткости \mathbf{K} и вектора нагрузки \mathbf{P} таким способом требует больших вычислительных работ. Задача упрощается, если составить так называемую **матрицу индексов**, определяющую соответствие номеров узловых перемещений КЭов узловым перемещениям всей модели. Тогда матрицу жесткости \mathbf{K} можно получать рассылкой в ее блоки отдельных блоков матриц жесткостей КЭов по информации, заключенной в матрице индексов. При этом рассылка идет с суммированием рассылаемого блока матрицы жесткости КЭ с имеющимся блоком в матрице \mathbf{K} . Такой метод называется **методом сложения жесткостей**.

Вектор узловой нагрузки \mathbf{P} формируется аналогично.

В результате этих действий формируется **разрешающее уравнение МКЭ**, по виду совпадающее с уравнением МКЭ для отдельного КЭ:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{P}.$$

Но уже здесь \mathbf{K} и \mathbf{P} – матрица жесткости и вектор нагрузки всей системы. Матрицу \mathbf{K} часто называют **глобальной матрицей жесткости**.

8. Учет граничных условий

Разрешающее уравнение МКЭ нельзя сразу решить относительно перемещений \mathbf{u} . Причина в том, что при его составлении не учтены граничные условия закрепления сооружения в опорах. Поэтому матрица жесткости \mathbf{K} является вырожденной (т.е. ее определитель равняется нулю). Чтобы выйти из положения, вектор перемещений приходится делить на две части – на перемещения по закрепленным (з) и незакрепленным (н) направлениям:

$$\mathbf{u} \quad \mathbf{u}_z \quad \mathbf{u}_n .$$

Так как опоры сооружения обычно бывают достаточно жесткими, их перемещения можно принять равными нулю ($\mathbf{u}_z = \mathbf{0}$), а нагрузку, приходящуюся на опоры, не учитывать. В таком случае разрешающее уравнение преобразуется в уравнение меньшего размера. Однако такая процедура существенно меняет структуру матрицы жесткости \mathbf{K} и усложняет дальнейшее решение.

Поэтому используется другой прием: все элементы строк и столбцов

матрицы жесткости, соответствующие закреплениям, приравниваются нулю, и лишь вместо их диагональных элементов ставятся единицы. В таком случае разрешающее уравнение упрощается без нарушения ее структуры и принимает вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & \mathbf{u}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{u}_n & \mathbf{P}_n \end{pmatrix}.$$

Здесь E – единичная матрица, \mathbf{K}_{nn} и \mathbf{P}_n – блоки матрицы жесткости и вектора нагрузки, соответствующие незакрепленным направлениям.

9. Определение перемещений, усилий и напряжений

После решения разрешающего уравнения и определения вектора узловых перемещений \mathbf{u} из этого вектора можно выбирать перемещения отдельных КЭов и определять перемещения в интересующих точках любого i -го КЭ по формуле

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{N}^i \mathbf{u}^i.$$

Усилия в узлах и напряжения внутри КЭов вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^i &= \mathbf{K}^i \mathbf{u}^i, \\ \sigma^i &= \mathbf{B}^i \mathbf{A}^t \mathbf{N}^i \mathbf{u}^i. \end{aligned}$$

В конкретных случаях последнюю формулу можно упростить. Например, напряжения ферменного элемента определяются так:

$$\sigma^i = E \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x^i & x^i & u_{1i} \\ \bar{l} & \bar{l} & u_{1j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 1 & 1 & u_{1i} \\ \bar{l} & \bar{l} & u_{1j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ T & 1j & 1i \end{pmatrix} (u^i \quad u^i).$$

10. Порядок расчета МКЭ

В настоящее время разработаны вычислительные комплексы, позволяющие рассчитывать на компьютере сложные и разнообразные сооружения на различные воздействия. К таким относятся расчетные комплексы ABACUS, ANSYS, NASTRAN, ЛИРА, СУМПАК и др.

Эти расчетные комплексы рассчитаны на использование мощных компьютеров, разнообразной вспомогательной аппаратуры, сложных компьютерных программ. Они состоят из трех основных частей:

1. **Препроцессор** – предназначен для подготовки и ввода исходных данных в компьютер. Используется для формирования расчетной модели сооружения (автоматического разбиения на КЭ по задаваемой сетке), определения координат узлов, геометрических и физических характеристик КЭов, проверки правильности и полноты исходных данных. Дает возможность обзора расчетной модели в разных ракурсах на мониторе.

2. **Процессор** – блок математического расчета МКЭ. Входящие в него

компьютерные программы предназначены для: составления и решения разрешающего уравнения; вычисления перемещений и деформаций, внутренних усилий и напряжений; проверки на прочность и жесткость; решения задач динамики и устойчивости.

3. **Постпроцессор** – предназначен для обработки результатов расчета, представления их в виде эпюр, в удобной для анализа табличной, графической и анимационной формах.

Алгоритм расчета сооружений МКЭ состоит из следующих основных этапов:

1. Выбор расчетной модели.
2. Перенос нагрузки в узлы.
3. Определение матриц жесткостей КЭов.
4. Перевод матриц жесткостей КЭов в общую систему координат.
5. Сборка глобальной матрицы жесткости **K**.
6. Учет граничных условий.
7. Решение разрешающего уравнения **K u = P**.
8. Вычисление внутренних усилий.
9. Обработка результатов расчета.

В о п р о с ы

1. Почему и как внешняя нагрузка переносится в узлы?
2. Как осуществляется переход к общей системе координат?
3. Как формируется глобальная матрица жесткости?
4. Как учитываются граничные условия?
5. Что такое глобальная матрица жесткости?
6. Каким образом вычисляются перемещения и внутренние усилия?
7. Какие функции выполняют препроцессор, процессор и постпроцессор?
8. Из каких этапов состоит алгоритм МКЭ?

Лекция 21

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

1. Введение в динамику сооружений

Колебания представляют одну из наиболее распространенных форм движения. Колеблются ветви деревьев, зажатая в тисках металлическая пластинка, колеблются качели, вагоны на рессорах при движении, вода и предметы на ней. Колеблются здания и сооружения от ветра, землетрясения, от работы различных машин и механизмов. При колебании сооружения величины и знаки внутренних усилий (напряжений) непрерывно меняются, что может привести к быстрому разрушению отдельных элементов, частей или всего сооружения.

Динамика сооружений изучает механические колебания сооружений. Как теоретическая наука, она разрабатывает различные методы и

алгоритмы расчета сооружений на динамические воздействия. В то же время она является прикладной наукой и решает конкретные задачи. Среди решаемых динамикой сооружений задач самыми важными являются **четыре задачи динамики**:

- 1) определение частот и форм собственных колебаний;
- 2) проверка на резонанс;
- 3) проверка динамической прочности;
- 4) проверка динамической жесткости.

Решение задач динамики намного сложнее решения задач статики, т.к. приходится учитывать дополнительный фактор – время.

При расчете на колебания сооружение рассматривается как **колебательная система**. Колебательные системы делятся на два типа. **Диссипативная система** – это система, у которой происходит диссипация (рассеивание) энергии. **Консервативная система** – это система, у которой рассеиванием энергии пренебрегают.

Простейшей моделью консервативной колебательной системы является система из пружины и массы (рис. 21.1 а). Жесткость пружины r характеризует упругость системы, а масса m – ее инерционные свойства.

Простейшей моделью диссипативной системы является система из пружины, вязкого элемента и массы (рис. 21.2). Сила сопротивления c , возникающая в вязком элементе, стремится остановить колебания системы. Такой элемент называют **демпфером** (или **амортизатором**). Поэтому диссипативную систему часто называют **демпфированной системой**.

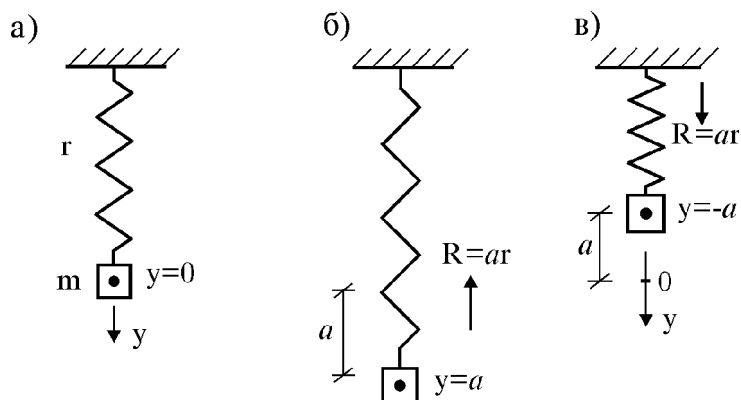


Рис. 21.1

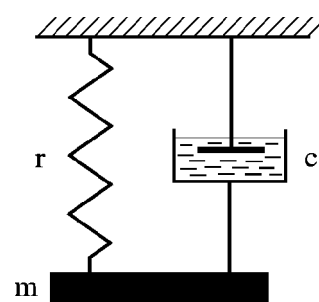


Рис. 21.2

2. Степень свободы и расчетная модель колебательной системы

Под степенью свободы в динамике сооружений понимается направление возможного независимого перемещения отдельной массы. В отличие от понятия степени свободы в статике сооружений (например, в кинематическом анализе), при определении динамических степеней

свободы учитываются и деформации элементов.

Число динамических степеней свободы $W_{дин}$ – это наименьшее число параметров, необходимых для определения положения всех масс системы.

Если рассматривать сооружение как систему из бесконечного числа элементарных масс, получим систему с бесконечным числом динамических степеней свободы. Расчет колебаний даже простейших систем (балок, плит или оболочек) по такой континуальной модели является непростой задачей. Поэтому в динамике сооружений расчетную модель стараются выбирать в виде системы с сосредоточенными массами.

Массы сооружения можно дискретизировать по-разному. Иногда, сосредоточив распределенную массу сооружения только в нескольких точках, можно достаточно точно рассчитать простейшие колебания.

Массу сооружения обычно сосредотачивают в характерных точках, где действуют наибольшие нагрузки. Если положение таких точек установить трудно, места и величины сосредоточенных масс могут быть найдены из условия равенства энергий всей системы и ее дискретной модели. Сосредоточенные массы, определяемые таким способом, называются **приведенными массами**. Большие массы, сосредоточенные на сооружении (грузы, различные машины, станки, оборудование и др.) рассматриваются как **кусковые массы**.

Приведенные и кусковые массы плоской системы имеют три степени свободы: они могут совершать колебания в двух независимых взаимно-перпендикулярных направлениях и вращаться относительно центра массы. Если вращение (крутильное колебание) массы не учитывать, получим **точечную массу**. Число степеней свободы точечной массы равно двум.

Рассмотрим ряд примеров.

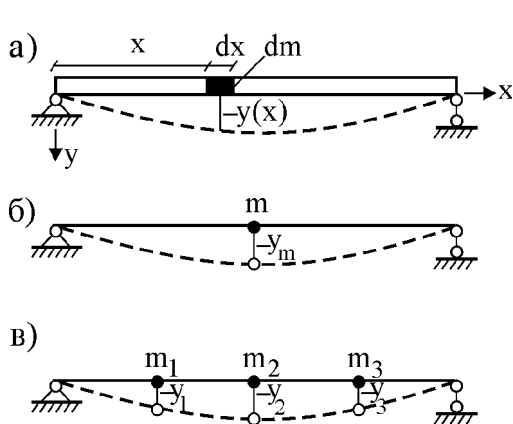


Рис. 21.3

1. Шарнирно-опертая балка (рис. 21.3 а) состоит из бесконечного числа элементарных масс dm , положение которых определяют бесконечное число перемещений $y(x)$. Поэтому $W_{дин} = \infty$. Если же массу балки сосредоточить в одной точке, положение точечной массы m будет определять один параметр – перемещение y_m (рис. 21.3 б). Тогда $W_{дин} = 1$. Если массу балки сосредоточить в трех точках, то положение масс m_1, m_2, m_3 будут определять

три параметра y_1, y_2, y_3 (рис. 21.3 в). Поэтому у этой системы $W_{дин} = 3$.

2. Водонапорная башня (рис. 21.4 а) и одноэтажная рама (рис. 21.4 в). У них основные массы расположены наверху. Поэтому их можно рассматривать как колебательные системы с одной массой и одной

степенью свободы, т.е. принять $W_{дин} = 1$ (рис. 21.4 б, г).

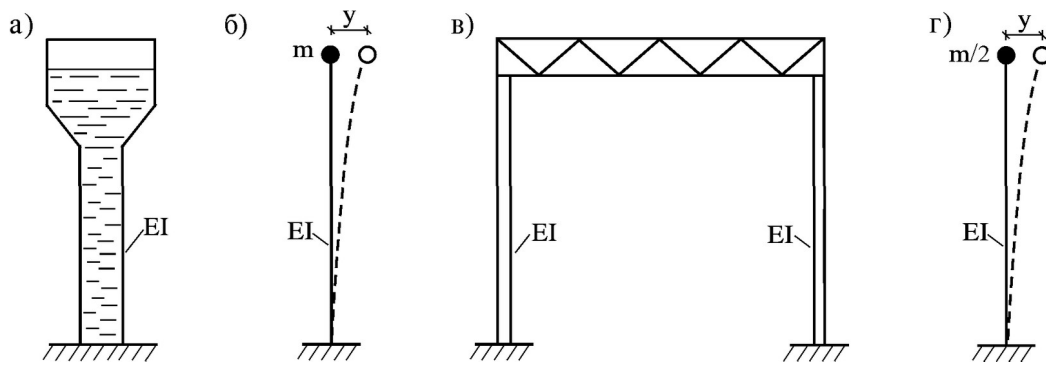


Рис. 21.4

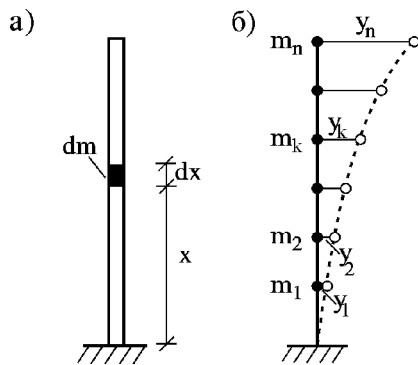


Рис. 21.5

3. Дымовую трубу с распределенной массой (рис. 21.5 а) нельзя рассматривать как динамическую систему только с одной степенью свободы, так как это приводит к неточным результатам. Ее следует рассматривать как систему с достаточно большим числом степеней свободы (рис. 21.5 б) и принять $W_{дин} = n$.

3. Основные виды и характеристики колебаний

В колебательной системе происходит периодический переход одного вида энергии в другой, когда потенциальная энергия (энергия, зависящая от положения системы) переходит в кинетическую энергию (энергию движения) и наоборот.

Наглядное представление колебательного процесса можно получить, если построить график колебаний отдельной массы в координатах t (время) и y (перемещение).

Если в колебательную систему будет поступать внешняя энергия, колебания будут нарастающими (рис. 21.6 а). Если к консервативной системе внешняя энергия не поступает, колебания будут незатухающими (рис. 21.6 б). Если энергия системы уменьшается (например, за счет трения в диссипативной системе), колебания будут затухающими (рис. 21.6 в).

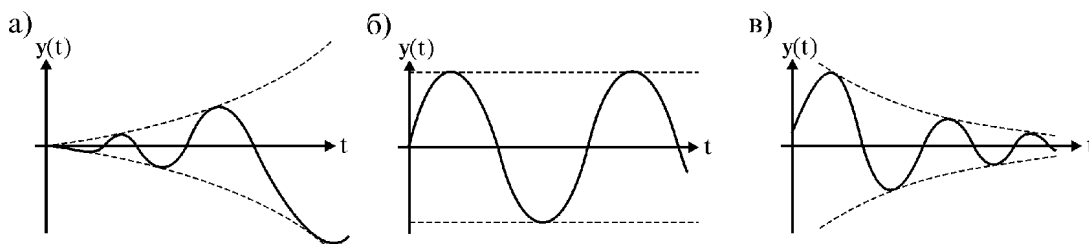


Рис. 21.6

Важной характеристикой колебательного процесса является форма колебаний. **Форма колебаний** – это кривая, показывающая положение точек колебательной системы относительно положения равновесия в фиксированный момент времени. Простейшие формы колебаний можно и наблюдать. Например, видны формы колебаний провода, висящего между двумя столбами, или струны гитары.

Колебания, происходящие при отсутствии внешней нагрузки, называются **свободными колебаниями**. Свободные колебания диссипативной системы являются затухающими, потому что ее полная энергия убывает. Энергия консервативной системы остается постоянной, и ее свободные колебания будут незатухающими. Однако в природе консервативных систем не существует, поэтому их колебания изучаются только теоретически. Свободные колебания консервативных систем называются **собственными колебаниями**.

Периодические колебания – это колебания, удовлетворяющие условию $y(t)=y(t+T)$. Здесь T – период колебаний, т.е. время одного колебания. Периодические колебания имеют и другие важные характеристики. Например, **амплитуда a** – это половина размаха колебания: $a=(y_{\max} - y_{\min})/2$, **круговая частота ω** – число колебаний за 2π секунды, **техническая частота f** – число колебаний за одну секунду.

Гармонические колебания – это колебания, изменяющиеся по закону $y(t) = a \sin(\omega t + \phi)$ или $y(t) = a \cos(\omega t + \phi)$. Здесь $\omega t + \phi$ – **фаза колебаний**, ϕ – **начальная фаза**.

Вынужденные колебания возникают под воздействием внешних сил.

Вибрация – это вынужденные колебания, происходящие с относительно малой амплитудой и не слишком малой частотой.

4. Виды динамических нагрузок

Колебания сооружения возникают от динамических нагрузок. В отличие от статических, динамические нагрузки изменяются с течением времени по величине, направлению или положению. Они сообщают массам системы ускорения, вызывают инерционные силы, что может привести к резкому возрастанию колебаний, и в итоге – к разрушению всего сооружения или его частей.

Рассмотрим основные виды динамических нагрузок.

Периодическая нагрузка – это нагрузка, прикладываемая к сооружению через определенный период. Источниками периодических нагрузок являются различные машины и механизмы: электродвигатели, металлообрабатывающие станки, вентиляторы, центрифуги и др. Если их вращающиеся части не уравновешены, то они при работе вызывают **гармоническую нагрузку** (нагрузку, изменяющуюся по закону синуса или косинуса). Такая нагрузка называется **вибрационной нагрузкой**. Поршневые компрессоры и насосы, штамповочные машины, дробилки,

копры и др. создают **негармоническую нагрузку**.

Импульсная нагрузка создается взрывом, падающим грузом или частями силовых установок (молотов, копров и др.).

Подвижная нагрузка создается железнодорожным составом, автомобильным транспортом и др.

Весьма опасными являются **недетерминированные** (случайные) **нагрузки**. Это – ветровые, сейсмические, взрывные нагрузки.

5. Методы динамики сооружений

Напряженно-деформированное состояние (НДС) колеблющегося сооружения постоянно меняется с течением времени. Чтобы проследить эти изменения, составляются дифференциальные уравнения колебаний. Существуют различные методы получения таких уравнений.

а) Кинестатический метод

В этом методе уравнения колебаний системы составляются на основе **принципа Даламбера**, согласно которому уравнения динамического равновесия можно получить из уравнений статического равновесия добавлением инерционных сил, равных произведению массы на ускорение и направленных в противоположную ускорениям сторону.

б) Кинематический метод

Когда в сооружении имеются одновременно сосредоточенные и распределенные массы, записать уравнения равновесия сложно. Тогда используется кинематический метод, основанный на **принципе возможных перемещений**: работа всех сил системы на ее возможных перемещениях равна нулю.

в) Энергетический метод

Основан на законе сохранения механической энергии, согласно которой сумма потенциальной и кинетической энергий колебательной системы постоянна во времени:

$$U + K = \text{const.}$$

Этот метод используется при решении задач о собственных колебаниях упругих консервативных систем.

В о п р о с ы

1. Какие основные задачи решает динамика сооружений?
2. Что такое диссипативная система?
3. Чем отличается консервативная система от диссипативной?
4. Какова разница между динамической и статической степенями свободы?
5. На какие основные виды делятся колебания колебательных систем?
6. Чем отличаются собственные и свободные колебания?
7. Что такое периодическое колебание?
8. Какие виды динамической нагрузки существуют?
9. Какие методы используются в динамике сооружений?

Лекция 22

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1. Вывод уравнения движения

Изучим колебания невесомой балки (рис. 22.1 а) с точечной массой m под действием динамической нагрузки $P = P(t)$. При учете только изгибных деформаций такую балку можно рассматривать как колебательную систему с одной динамической степенью свободы.

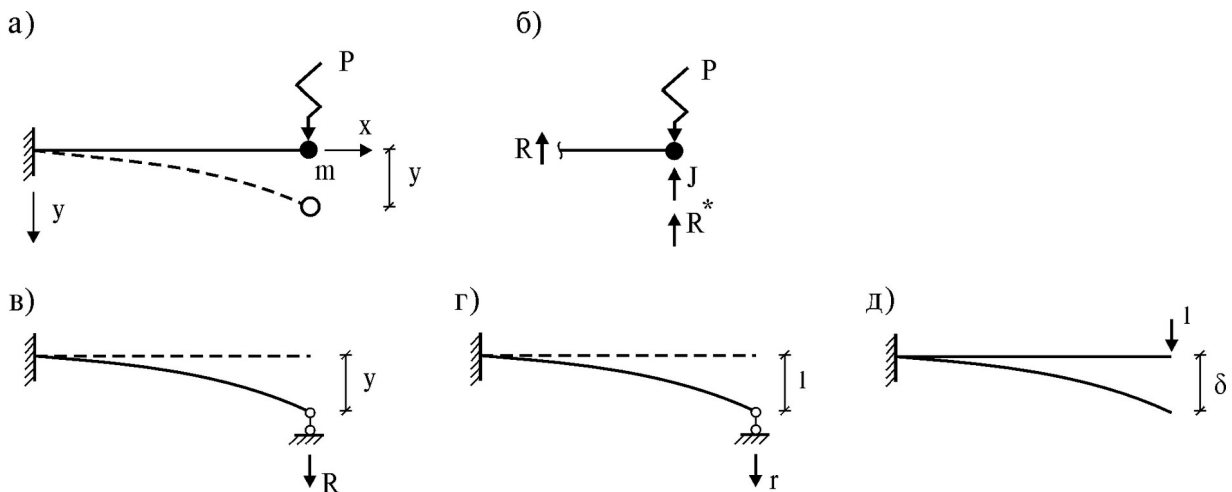


Рис. 22.1

Рассмотрим движение массы относительно ее исходного положения равновесия. Для этого воспользуемся кинетостатическим методом, по которой, согласно принципу Даламбера, к уравнению статического равновесия добавляется инерционная сила (рис. 22.1 б):

$$P - J - R - R^* = 0,$$

где $J = m\ddot{y}$ – сила инерции, \ddot{y} – ускорение, R – сила упругости балки, R^* – сила сопротивления среды движению массы. Так как во время колебаний система находится в движении, оно называется **уравнением движения**.

Силу упругости R можно определить из решения задачи статики в двух формах – в форме метода перемещений и в форме метода сил.

Вначале применим метод перемещений. С этой целью в свободном правом конце балки введем вертикальную связь и дадим ей такое же перемещение y , какое возникает при колебаниях (рис. 22.1 в). Реакция этой связи будет равна силе отпора балки R . Если балка упругая, эта сила пропорциональна отклонению балки y :

$$R = ry,$$

где r – упругая характеристика балки, называемая **жесткостью**. Она равна реакции в связи при ее смещении на единицу (рис. 22.1 г).

Подставив в уравнение движения выражения сил инерции и

упругости, получим уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода перемещений:

$$m\ddot{y} + ry = R^* + P.$$

Для применения метода сил рассмотрим другое состояние балки, когда в направлении колебаний массы приложена единичная сила (рис. 22.1 д). Перемещение этой точки под действием единичной силы называется **податливостью**. Обозначим его буквой δ . На основании теоремы о взаимности работ, возможная работа сил состояния “г” (рис.

22.1 г) на перемещениях состояния “д” (рис. 22.1 д) равна возможной работе сил состояния “д” на перемещениях состояния “г”, т.е.

$$r \delta = 1 \cdot 1.$$

Отсюда получим уравнение связи между податливостью и жесткостью

$$r = 1/\delta.$$

Подставим его в уравнение колебаний в форме метода перемещений. После деления на m имеем

$$\ddot{y} + \frac{1}{m\delta} y = \frac{R^*}{m} + \frac{P}{m}.$$

Если обозначить

$$\frac{1}{m\delta} = \omega^2,$$

получим окончательный вид уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода сил:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{R^*}{m} + \frac{P}{m}.$$

Полученные уравнения движения системы с одной степенью свободы в формах метода перемещений и метода сил позволяют вести расчет простейших сооружений на колебания. Выбор конкретного метода зависит от особенностей системы и определяется самим расчетчиком.

2. Собственные колебания

Собственные колебания рассматриваются при $P=0$, $R^*=0$. В таком случае уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Его общее решение будет:

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Если сделать замены $A = a \cos \phi$, $B = a \sin \phi$, получим

$$y = a \sin(\omega t + \phi).$$

Таким образом, собственные колебания являются гармоническими.

Определим их начальную фазу ϕ и амплитуду a . Пусть при $t=0$

известны начальное отклонение y_0 и начальная скорость v_0 . Тогда

$$y_0 = a \sin \phi, \quad v_0 = \dot{y}(0) = a\omega \cos \phi.$$

Из них $\frac{y_0}{v_0} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\omega}$ и $\frac{v_0}{\omega} = a \cos \phi$.

имеем

Поэтому

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega y_0}{v_0}, \quad y_0 = \frac{v_0}{\omega} a \sin \phi \cos \phi = a \sin \phi \cos \phi.$$

Следовательно,

$$\phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega y_0}{v_0}, \quad a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Если вес массы равен G , а ускорение свободного падения g , то $G=mg$. К тому же, вес G вызывает статический прогиб, определяемый по формуле $y_{cm} = G\delta$. Поэтому имеем

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta} \left(\frac{g}{g} \frac{1}{m\delta} \frac{g}{G\delta} \frac{g}{y_{cm}} \right).$$

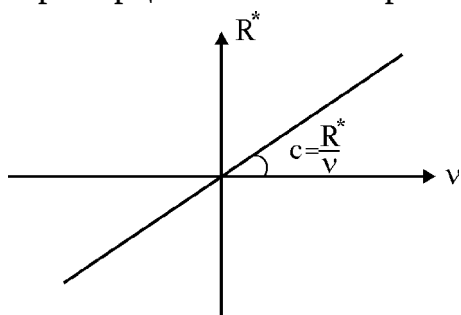
Эти формулы позволяют найти частоту из решения статической задачи.

Из полученных формул вытекают следующие выводы:

- 1) начальная фаза и амплитуда зависят от начальных условий;
- 2) частота и период собственных колебаний системы не зависят от начальных условий;
- 3) при увеличении жесткости системы частота собственных колебаний возрастает, а при увеличении массы – уменьшается.

3. Свободные колебания

Колебаниям сооружения оказывает сопротивление внутреннее трение, возникающее в связях между элементами и в самих элементах. Закономерности внутреннего трения пока изучены недостаточно. Поэтому для его учета используются различные гипотезы. Например, по **гипотезе линейно-вязкого трения** сила внутреннего трения R^* принимается пропорциональной скорости деформации v (рис. 22.2):



$$R^* = cv \quad \text{или} \quad R^* = c\dot{y}.$$

Принятый в этой гипотезе коэффициент пропорциональности c называется **коэффициентом демпфирования**.

Гипотеза линейно-вязкого трения впервые была выдвинута Фойгтом, поэтому ее часто называют **гипотезой Фойгта**.

Недостатком гипотезы Фойгта является то, что коэффициент демпфирования c не является физической постоянной материала и зависит от распределения масс и жесткостей колебательной системы, а вследствие этого зависит и от частоты колебаний.

При свободных колебаниях (когда $P=0$) и использовании гипотезы Фойгта уравнение колебаний системы с одной степенью свободы будет

$$y'' + \frac{c}{m} y' + \omega^2 y = 0.$$

Если обозначить

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

получаем

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0.$$

Введенный здесь коэффициент α называется **коэффициентом затухания**. В отличие от коэффициента демпфирования c , он является постоянным для материала и определяется из эксперимента.

Общее решение полученного уравнения ищем в форме Эйлера: $y = Ae^{kt}$. После его подстановки получим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k\alpha + \omega^2 = 0,$$

корни которого

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

дают три возможных решения.

а) Малое демпфирование ($\alpha < \omega$)

В этом случае корни уравнения комплексно-сопряженные. Поэтому общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t),$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ называется **частотой демпфированной системы**.

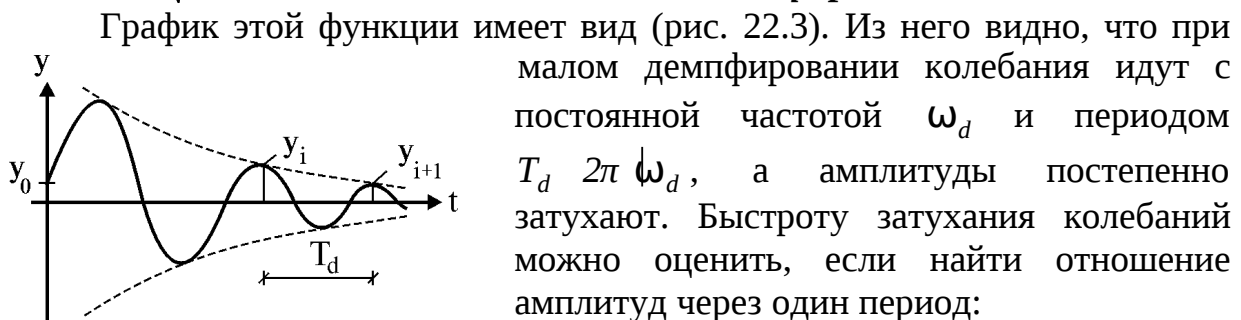


Рис. 22.3

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{ae^{\alpha t}}{ae^{\alpha(t+T_d)}} = e^{\alpha T_d}.$$

Как видим, амплитуды колебаний убывают по геометрической прогрессии, и тем быстрее, чем больше α . Натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\delta_d \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} \propto T_d.$$

Для различных материалов и сооружений быстрота затухания колебаний различна, что видно из следующей таблицы.

Таблица 2
Быстрота и логарифмический декремент затухания колебаний

Типы сооружений	Железобетонные	Кирпичные	Деревянные	Здания	Метал. башни, мачты	Металлические	Метал. облепч. покрыт.
y_i/y_{i+1}	1,37	1,28	1,17	1,17	1,17	1,08	1,06
δ_d	0,314	0,25	0,157	0,157	0,157	0,078	0,063

Быстрота затухания зависит также от состояния сооружения, качества материала, уровня напряженности элементов и т.д. Величину δ_d определяют экспериментально.

Так как круговая частота свободных колебаний определяется по формуле $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, то она всегда меньше частоты собственных колебаний ω . С другой стороны, в обычных строительных конструкциях α бывает значительно меньше ω . Поэтому можно принять $\omega_d \approx \omega$. Естественно, период затухающих колебаний T_d бывает несколько больше периода собственных колебаний T . Однако при малых α его также можно принять равным периоду собственных колебаний системы, т.е. $T_d \approx T$.

Следовательно, при определении частот, периодов и форм свободных колебаний многих сооружений демпфирование можно не учитывать. Но это недопустимо при определении перемещений, скоростей и ускорений, которые уменьшаются тем быстрее, чем больше α .

б) Критическое демпфирование ($\alpha = \omega$)

В этом случае корни характеристического уравнения вещественны и равны: $k_{1,2} = -\alpha$. Тогда общее решение уравнения свободных колебаний будет

$$y = e^{-\alpha t} (A + Bt).$$

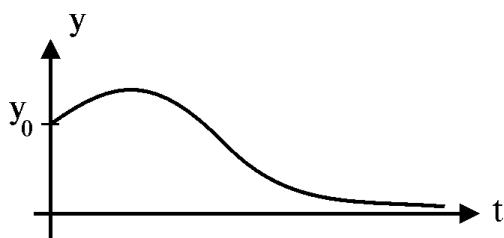


Рис. 22.4

График этой функции представлен на рис. 22.4. Из него видно, что отклоненная масса, чуть качнувшись, постепенно приближается к исходному положению. Значит, движение системы в этом случае будет неколебательным и постепенно угасающим. Такое движение называется **апериодическим движением**.

в) Большое демпфирование ($\alpha > \omega$)

При этом корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны. Не вдаваясь в расчет, отметим, что и в этом случае колебания отсутствуют, и система совершает аperiodическое движение.

Итак, при переходе от малого демпфирования к большому свободные колебания системы прекращаются. Таким образом, критическое демпфирование определяет минимальную величину демпфирования, при котором колебания не возникают.

Большое демпфирование имеют лишь сооружения, в которые введены специальные устройства – демпферы (вязкие элементы с большим сопротивлением) с целью исключения нежелательных колебаний. Величину минимального сопротивления демпферов, необходимых для исключения колебаний, вычисляют из условия критического демпфирования $=0$.

В о п р о с ы

1. Какие основные задачи решает динамика сооружений?
2. Чем отличается динамическая степень свободы от статической?
3. На какие три вида делятся колебания колебательных систем?
4. Какие выводы вытекают из формул определения собственной частоты?
5. Что такое коэффициент демпфирования?
6. Как определяется логарифмический декремент затухания?
7. Что такое аperiodическое движение?

Лекция 23

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ (продолжение)

4. Вынужденные колебания без демпфирования

Если при действии динамической нагрузки $P=P(t)$ не учитывать силы сопротивления, получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + \omega^2 y = \frac{P}{m}$$

Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного и частного решений неоднородного уравнений:

$$y = y_{од} + y_{ч},$$

где $y_{од}$ совпадает с решением уравнения собственных колебаний $y_{соб}$, а частное решение зависит от вида динамической нагрузки. Последнее будем искать разложением нагрузки на сумму мгновенных импульсов.

а) Действие мгновенного импульса

Пусть на находящуюся в покое систему с массой m в момент времени τ воздействует мгновенный импульс $S=mv$ (рис. 23.1).

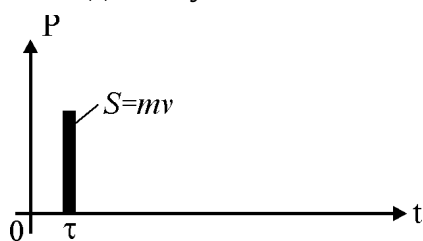


Рис. 23.1

После этого система начнет свободно колебаться. Если не учитывать силы сопротивления среды, колебания будут гармоническими: $y_u = a \sin(\omega t + \phi)$.

В момент воздействия импульса масса еще не успевает изменить свое положение, однако сообщает ей некоторую скорость. Значит, $y_{\tau=t} = 0$, $v_{\tau=t} = S/m$. По этим условиям определяем начальную фазу и амплитуду:

$$\phi = -\omega\tau, \quad a = S/m\omega.$$

Таким образом, воздействие мгновенного импульса приводит к колебанию массы по гармоническому закону

$$y_u = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t - \tau$$

с частотой ω и периодом T (рис. 23.2).

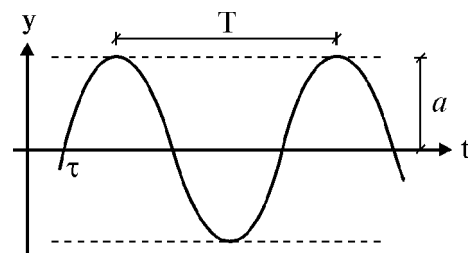


Рис. 23.2

б) Действие произвольной силы

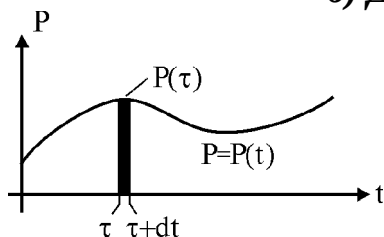


Рис. 23.3

Если на систему действует нагрузка, изменяющаяся по закону $P(t)$, ее можно представить как сумму бесконечно большого числа мгновенных импульсов $S = P(\tau) dt$ (рис. 23.3). Тогда решение определится как интеграл

$$y_u = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t P(t) \sin \omega t - \tau dt.$$

Это выражение называется **интегралом Дюамеля**.

в) Действие вибрационной нагрузки

Пусть действует вибрационная нагрузка, изменяющаяся по закону $P(t) = P_0 \sin \theta t$. Подстановка этой функции в интеграл Дюамеля дает

$$y_u = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t P_0 \sin \theta \tau \sin \omega t - \tau dt.$$

После интегрирования этого выражения общее решение будет

$$y_{од} + y_u + y_{соб} = \frac{P_0}{m\omega(\theta^2 - \omega^2)} (\theta \sin \omega t - \omega \sin \theta t).$$

Первое слагаемое правой части этого выражения $y_{соб}$ и слагаемое в скобках $\theta \sin \omega t$ относятся к собственным колебаниям с частотой ω . Из-за

наличия демпфирования эти колебания достаточно быстро затухают. Поэтому в общем решении им можно пренебречь и оставить только второе слагаемое из выражения в скобках. Тогда получим

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)^2} \sin \theta t.$$

Так как $\omega^2 = \frac{P_0}{m\delta}$, то $\frac{1}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}$ и $\frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)^2} = \frac{P_0}{m\omega^4} \frac{1}{(1 - (\theta/\omega)^2)^2} = \frac{y_{cm}}{\omega^2} \frac{1}{(1 - (\theta/\omega)^2)^2}$. Поэтому имеем

Из этой формулы следует, что когда $\theta \rightarrow \omega$, то $y \rightarrow \infty$. Такое резкое увеличение перемещений при колебаниях называется **резонансом**. В действительности перемещения сооружения бесконечно большими быть не могут, т.к. существует демпфирование. Тем не менее, амплитуды колебаний могут быть значительными, что может привести к разрушению сооружения. Чтобы этого не случилось, стремятся избежать резонанса.

Резонанс системы можно оценить через отношение максимального динамического перемещения к статическому перемещению:

$$\mu = \frac{y_{дин}^{max}}{y_{ст}} = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}.$$

Оно называется **коэффициентом динамичности** (или **динамическим коэффициентом**). Как следует из формулы, резонанса не будет, если отношение частоты вибрационной силы θ к частоте ω отличается от единицы. Согласно некоторым нормам, потребуем, чтобы они отличались не менее чем на 20%. В этом случае должно выполняться условие

$$\left| 1 - \frac{\theta}{\omega} \right| \geq 0,2,$$

которое определяет так называемую резонансно-опасную зону (на рис. 23.4 это – заштрихованная область).

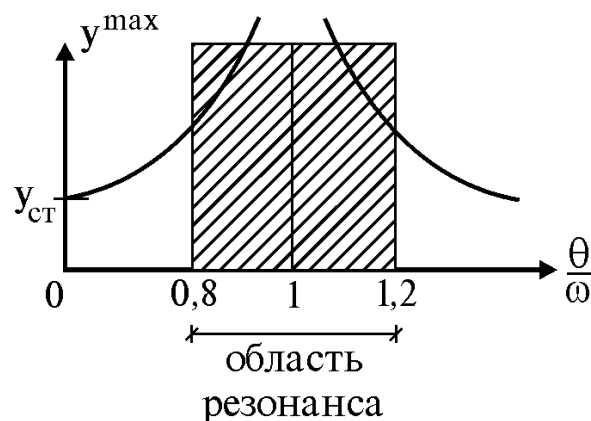


Рис. 23.4

5. Вынужденные колебания с учетом демпфирования

Если внутреннее трение идеализируется по гипотезе Фойгта, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы принимает вид

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = \frac{P}{m}$$

Его решение равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений:

$$y = y_{од} + y_{ч.}$$

Решение однородного уравнения (уравнения свободных колебаний) нам известно. Частное решение неоднородного уравнения, также как и ранее, получим на основе теории мгновенного импульса.

Для краткости ограничимся лишь рассмотрением малого демпфирования (когда $\alpha < \omega$), наиболее характерного для сооружений.

а) Действие мгновенного импульса

После действия мгновенного импульса S в момент времени τ система будет находиться в состоянии свободных колебаний при начальных условиях $y_{t=\tau} = 0$, $v_{t=\tau} = \frac{S}{m}$.

А решение уравнения свободных колебаний для случая $\alpha < \omega$ нами было получено и имеет вид

$$y = ae^{-\alpha t} \sin \omega_d t + \phi d, \text{ где } \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Поэтому

$$y' = ae^{-\alpha t} (\omega_d \cos \omega_d t - \alpha \sin \omega_d t) + \phi d.$$

Используя начальные условия, получаем

$$\phi_d = \omega_d \tau; \quad a = S e^{\alpha \tau} / m \omega_d.$$

С учетом этого, уравнение движения системы будет

$$y = \frac{S}{m \omega_d} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau).$$

Из него следует, что колебания будут происходить с постоянной частотой ω_d и быстро затухать.

б) Действие произвольной нагрузки

Определяя частное решение неоднородного уравнения, силу $P = P(t)$ представим как сумму бесконечно большого числа мгновенных импульсов (рис. 23.1). Принимая в предыдущем решении $S = P(\tau)$ и интегрируя в интервале $(0 \div t)$, получим интеграл Дюамеля в виде

$$y = \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau.$$

Тогда полное перемещение массы будет

$$y = y_{од} + y_{ч} = a e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + \phi + \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau.$$

Если подынтегральная функция интегрируема аналитически, то реакция сооружения определяется непосредственно. Для случаев, когда функция $P(t)$ задается сложной функцией или графически, эта задача решается приближенно, используя численные методы.

в) Действие вибрационной нагрузки

При действии вибрационной нагрузки $P(t) = P_0 \sin \theta t$ дифференциальное уравнение вынужденных колебаний принимает вид

$$m \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t.$$

Определение его частного решения из интеграла Дюамеля достаточно сложно. Задача упрощается, если решение искать в форме $y_{ч} = C \sin(\theta t + \phi_1)$. Тогда получается следующий результат (без учета затухающих свободных колебаний):

$$y = y_{ч} = \frac{\omega^2 y_{ст}}{\sqrt{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \theta^2}} \sin(\theta t + \phi_1).$$

Из анализа этой формулы можно сделать некоторые выводы:

- 1) после установления колебаний вынужденные колебания идут с частотой возмущающей силы;
- 2) амплитуда колебаний не зависит от начальных условий;
- 3) при вынужденных колебаниях системы с демпфированием имеет место сдвиг фазы ϕ_1 между действующей силой P и перемещением y .

Определим динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{y_{дин}^{max}}{y_{ст}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \theta^2}}.$$

Его наибольшее значение достигается при $\theta^2 = \omega^2 - 2\alpha^2$:

$$\mu_{max} = \frac{\omega^2}{2\alpha\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{1 - \gamma^2/4}},$$

где $\gamma = 2\alpha/\omega$ – коэффициент неупругого сопротивления.

Графики изменения динамического коэффициента μ при разных значениях коэффициента неупругого сопротивления γ показаны на рис. 23.5.

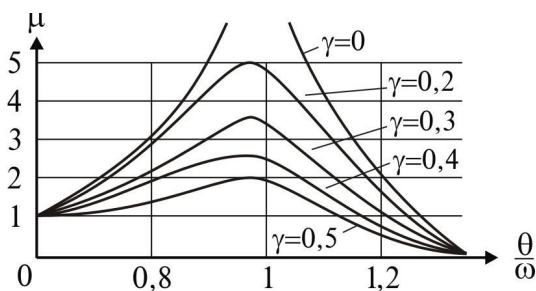


Рис. 23.5

Из последней формулы и графика μ следует, что в системах с демпфированием:

- 1) амплитуды колебаний имеют конечную величину;
- 2) вне пределов резонансно-опасной зоны демпфирование мало влияет на динамический коэффициент;
- 3) в резонансно-опасной зоне ($0,8 \leq \theta/\omega \leq 1,2$) демпфирование существенно влияет на амплитуду колебаний, если $\gamma > 0,4$; при проектировании сооружений желательно избегать этой зоны, подбирая соотношения размеров и жесткостей отдельных элементов или вводя специальные виброгасители и т.п.

В о п р о с ы

1. Какие колебания возникают при действии мгновенного импульса?
2. Что такое интеграл Дюамеля?
3. От чего зависит коэффициент динамичности?
4. Что такое коэффициент неупругого сопротивления?

Лекция 24

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Вывод уравнения движения

Рассмотрим невесомую балку с n точечными массами (рис. 24.1 а).

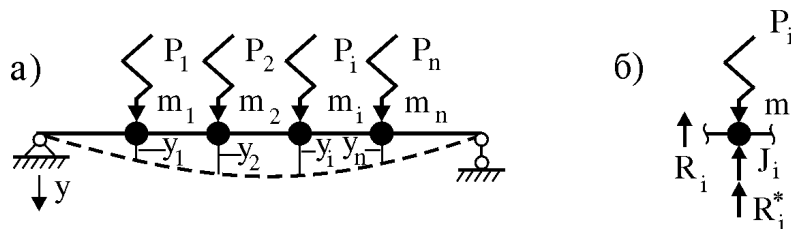


Рис. 24.1

При изучении только вертикальных колебаний балки ее можно рассматривать как колебательную систему с n динамическими степенями свободы. Если на массы будут действовать динамические силы $P_1=P_1(t), \dots, P_n=P_n(t)$, в них возникнут инерционные силы $J_1 = m_1 \ddot{y}_1, \dots, J_n = m_n \ddot{y}_n$, а со стороны балки будут действовать силы упругости R_1, \dots, R_n и силы сопротивления R_1^*, \dots, R_n^* .

Из условия равновесия сил (рис. 24.1 б) получим

$$J_i + R_i + R_i^* - P_i = 0, \text{ где } i = 1, n.$$

Если силы упругости R_i определить по методу сил и все n уравнений объединить в систему, получим матричное уравнение

$$\delta m \ddot{y} + \delta R - \delta P = 0,$$

2) неопределенное решение; для этого определитель системы уравнений должен равняться нулю:

$$\det \mathbf{d} \lambda \mathbf{E} = \det \begin{pmatrix} (d_{11} \lambda) & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & (d_{22} \lambda) & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & (d_{nn} \lambda) \end{pmatrix} = 0.$$


Если раскрыть этот определитель, получим полином n -ной степени относительно λ :

$$\lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} q_{n-1} \lambda + (-1)^n q_n = 0.$$

Такой полином имеет n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые называются **собственными значениями** динамической матрицы \mathbf{d} .

Запишем собственные значения в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Так как $\lambda = -1/\omega^2$, то ω_i . Поэтому круговые частоты колебаний расположатся в порядке возрастания:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n.$$

Эта последовательность $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называется **спектром частот**, а наименьшая частота ω_1 называется **основной частотой**.

Таким образом, динамическая система с n степенями свободы имеет n частот собственных колебаний (n собственных частот). Для практических целей наиболее важными являются несколько наименьших, так называемых низших частот собственных колебаний.

Каждой собственной частоте соответствует своя форма собственных колебаний. Для их определения собственные значения λ_i нужно поочередно подставлять в систему алгебраических уравнений. Но во всех случаях определитель системы уравнений будет равняться нулю. Поэтому одно уравнение отбрасывают, а амплитуду одной из масс считают условно определенной (например, можно принять $a_1=1$). Тогда из оставшихся уравнений можно вычислить амплитуды остальных масс.

Формы собственных колебаний динамической системы (рис. 24.2 а) можно представить графически, откладывая амплитуды масс (рис. 24.2 б):

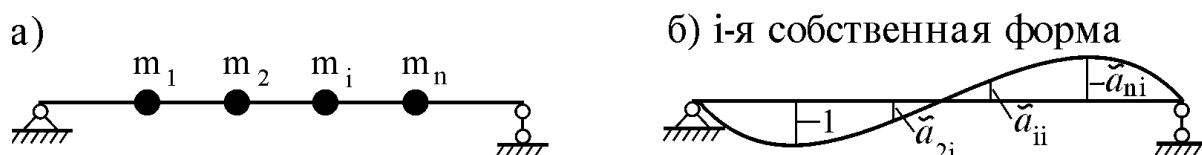


Рис. 24.2

3. Вынужденные колебания при вибрационной нагрузке

Пусть на систему действуют вибрационные силы $P_i = P_i \sin \theta t$. Соберем их в общий вектор $\mathbf{P} = \bar{P} \sin \theta t$, где $\bar{P} = \bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$ – амплитудные (наибольшие) значения вибрационных сил, θ – их круговая частота.

Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \delta \mathbf{P}.$$

Его общее решение равняется сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{од} + \mathbf{y}_ч + \mathbf{y}_{св} + \mathbf{y}_{вын}.$$

Как и в системах с одной степенью свободы, свободные колебания быстро затухают: $\mathbf{y}_{св} = \mathbf{0}$. Поэтому после установления колебаний они будут совершаться с частотой вибрационной силы:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \sin \theta t.$$

Здесь $\bar{\mathbf{y}} = \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ – вектор амплитуд колебаний масс.

Если учесть, что

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2 \bar{\mathbf{y}} \sin \theta t$$

и что

$$\delta \mathbf{P} = \delta \bar{\mathbf{P}} \sin \theta t = \mathbf{y}_{ст} \sin \theta t,$$

то уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\theta^2 \delta \mathbf{m} \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} = \delta \mathbf{P}.$$

Из него можно найти вектор амплитуд колебаний:

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{E} - \theta^2 \delta \mathbf{m})^{-1} \mathbf{y}_{ст}.$$

Однако, если частота вибрационной силы θ будет близка к одной из собственных частот ω_i , то определитель матрицы в скобках становится близким к нулю. Это приводит к резкому увеличению амплитуд колебаний масс, т.е. является следствием резонанса. В системе с n степенями свободы возможны n резонансных состояний (рис. 24.3).

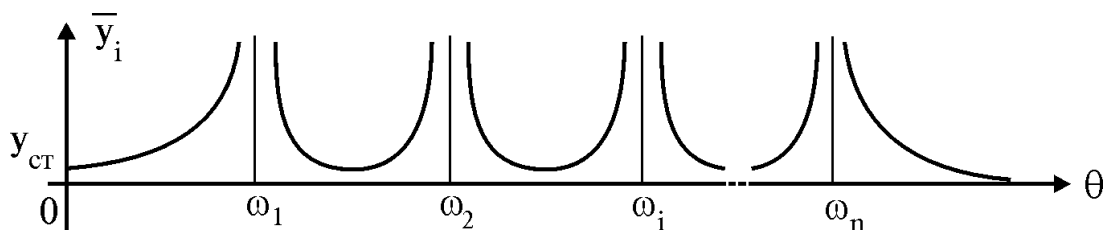


Рис. 24.3

При **проверке динамической прочности** сооружения необходимо определять действующие на систему максимальные силы.

Из соотношения

$$J \ddot{y} = \theta^2 m y$$

следует, что амплитудные (максимальные) значения инерционных сил J изменяются по такому же закону:

$$J = \theta^2 m y.$$

Отсюда

$$\bar{y} = \frac{1}{\theta^2} m^{-1} J.$$

Тогда, учитывая что

$$\delta P = y_{cm},$$

уравнение вынужденных колебаний принимает вид

$$\left(\delta \frac{1}{\theta^2} m^{-1} \right) J = y_{cm}.$$

В обычной записи это уравнение является системой n алгебраических уравнений

$$\begin{matrix} \delta_{11}^* J_1 & \delta_{12} J_2 & \dots & \delta_{1n} J_n & y_{1,cm} \\ \delta_{21} J_1 & \delta_{22}^* J_2 & \dots & \delta_{2n} J_n & y_{2,cm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} J_1 & \delta_{n2} J_2 & \dots & \delta_{nn}^* J_n & y_{n,cm} \end{matrix}, \quad \text{где } \delta_{ii}^* = \frac{1}{m_i \theta^2}, \quad (i = \overline{1, n})$$

и называется **системой канонических уравнений расчета на вибрационную нагрузку**. Из него определяются максимальные значения инерционных сил J_i . После этого вычисляются обобщенные силы, действующие на систему $\bar{Q}_i = \bar{P}_i \bar{J}_i$, затем максимальные значения внутренних усилий, а по ним проводится проверка прочности.

Порядок расчета на вибрационную нагрузку

Расчет на вибрационную нагрузку обычно состоит из решения трех задач динамики:

1) расчет на собственные колебания – определение частот и форм собственных колебаний из уравнения $\det \mathbf{d} - \lambda \mathbf{E} = 0$;

2) проверка на резонанс по условию $\left| \frac{\omega \beta \theta}{\omega_i P} \right|$ в ка динамической
е прочности
р

$\max \delta_{in}$

$0,3$
;
 σ_{in}

M

$\frac{\delta_{in}}{W}$

При необходимости решается четвертая задача динамики – проверка динамической жесткости по условию $y_i < [y_i]$.

В о п р о с ы

1. Что такое вековое уравнение?
2. Что такое спектр частот?
3. Как определяются формы собственных колебаний?
4. Какой вид имеет система канонических уравнений расчета на вибрационную нагрузку?
5. Каков порядок расчета на вибрационную нагрузку?

Лекция 25

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

1. Введение в устойчивость сооружений

Кроме прочности и жесткости, сооружение обязательно должно быть устойчивым. Это потому, что при потере устойчивости сооружение или разрушается, или становится непригодным для дальнейшей эксплуатации. Например, даже такой простейший элемент как прямолинейный длинный стержень при действии продольной сжимающей силы может резко изогнуться и потерять свою первоначальную прямолинейную форму. В практике строительства и эксплуатации различных сооружений (мостов, высотных зданий и др.) известны случаи их разрушения из-за потери устойчивости.

Устойчивость – это способность сооружения сохранять свое первоначальное положение или форму. Переход устойчивого сооружения в неустойчивое состояние называется **потерей устойчивости**. Граница перехода в неустойчивое состояние называется **критическим состоянием**. Сила, приводящая сооружение в критическое состояние, называется **критической силой**. Критическую силу будем обозначать $R_{кр}$.

Ответ на вопрос «устойчиво или неустойчиво сооружение?» является очень важной задачей, потому что для потери устойчивости сооружения, достигшего критического состояния, достаточно и незначительной причины. Если же процесс потери устойчивости начался, он идет очень быстро и приводит к резкому изменению первоначальной формы или разрушению частей или всего сооружения.

2. Виды и типы потери устойчивости

Различают два вида потери устойчивости – устойчивость положения и устойчивость формы.

Устойчивость положения – это способность сооружения сохранять свое положение. Например, при действии на подпорную стенку нагрузки q (рис. 25.1 а), относительно точки А создается опрокидывающий момент

$M_{опр} = qh^2 / 2$, от чего подпорная стенка может потерять устойчивость (рис. 25.1 б). Этому противостоит собственный вес подпорной стенки G , создающий удерживающий момент $M_{уд} = Gl$. Устойчивость системы зависит от соотношения этих моментов, так как при:

- 1) $M_{опр} < M_{уд}$ – система устойчива;
- 2) $M_{опр} > M_{уд}$ – система неустойчива;
- 3) $M_{опр} = M_{уд}$ – система безразлична.

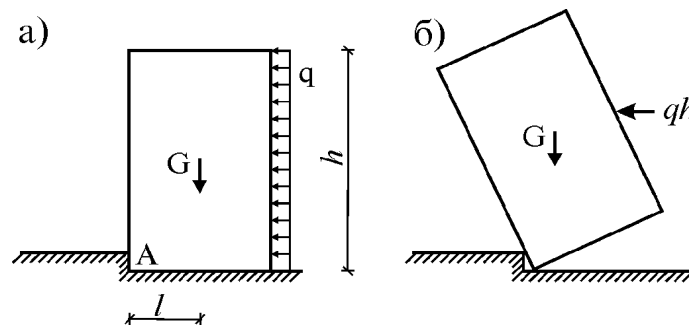


Рис. 25.1

Устойчивость формы – это способность сооружения сохранять свою первоначальную форму.

Например, если верхний конец стержня с действующей продольной силой P немного отклонить в сторону (рис. 25.2 а), он при $P < P_{кр}$ вернется в исходное положение. Такая система является устойчивой.

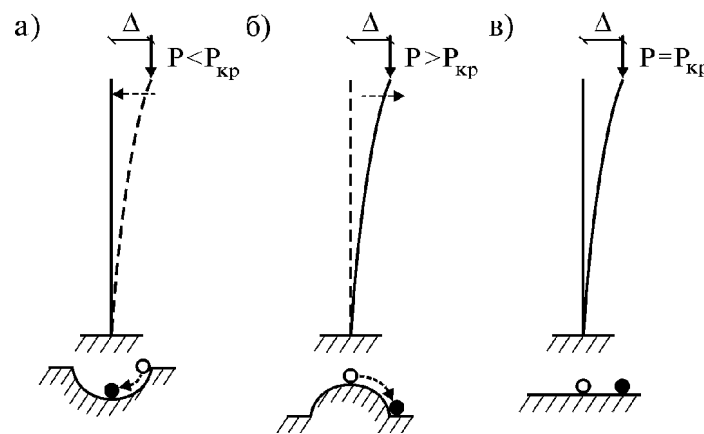


Рис. 25.2

Если же $P > P_{кр}$, перемещения стержня начинают возрастать (рис. 25.2 б). Такая система в исходное состояние вернуться не может. Поэтому ее называют неустойчивой.

Если $P = P_{кр}$, система остается в безразличном состоянии (рис. 25.2 в).

Таким образом, в зависимости от величины приложенной нагрузки система может быть устойчивой, неустойчивой или безразличной. Внизу на рисунках 25.2 а-в показаны схематические аналоги устойчивой, неустойчивой и безразличной систем.

Потеря устойчивости делится на 2 рода.

Потеря устойчивости первого рода связана с появлением нового вида деформации и характеризуется нарушением равновесия между нагрузкой и внутренними усилиями. Она может быть трех типов:

- потеря устойчивости центрального сжатия (рис. 25.2 б);
- потеря устойчивости симметричной формы деформации (рис. 25.3 а, б);
- потеря устойчивости плоской деформации (рис. 25.3 в).

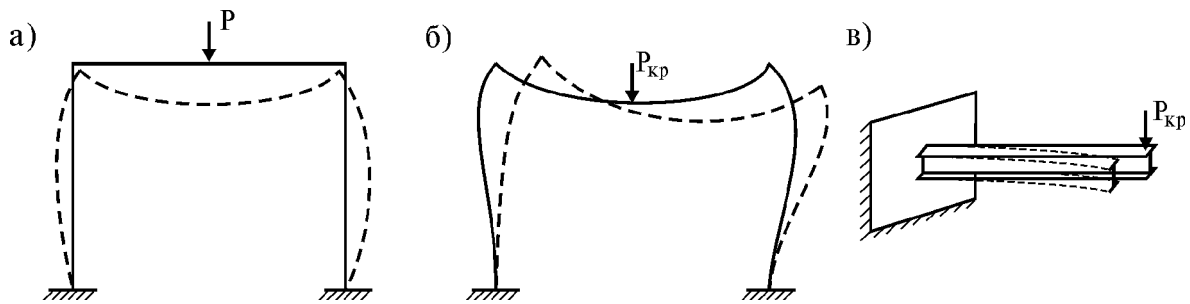


Рис. 25.3

Потеря устойчивости второго рода наблюдается при потере несущей способности всего сооружения и характеризуется резким возрастанием предыдущих деформаций. В этом случае равновесие между нагрузкой и внутренними усилиями нарушается даже без появления новых видов деформаций (рис. 25.4 а-в):

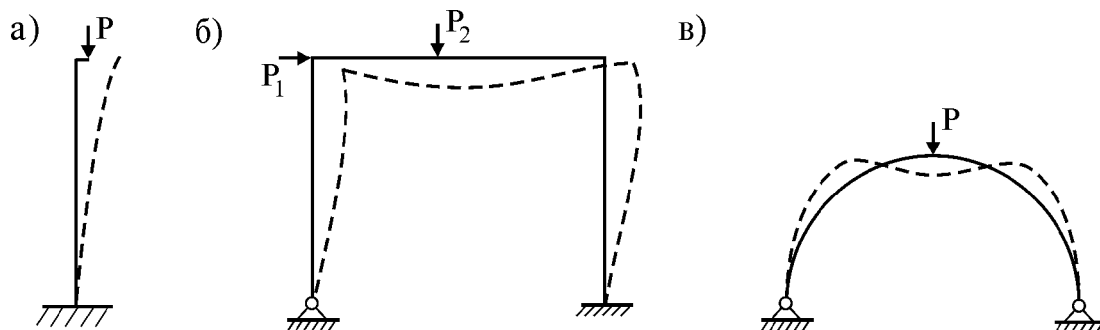


Рис. 25.4

3. Задачи и методы расчета на устойчивость

Основной задачей теории устойчивости является определение критической силы $P_{кр}$. Поскольку потерявшее устойчивость сооружение обычно непригодно для дальнейшей эксплуатации, определять форму потери устойчивости сооружения во многих случаях не требуется.

Если на систему действует несколько сил (рис. 25.5 а), определять их критические значения одновременно довольно трудно. Поэтому одну из сил (обычно наибольшую) принимают за основную, а остальные выражают через нее (рис. 25.5 б). Тогда вместо определения нескольких критических сил можно определять только одну (наибольшую).

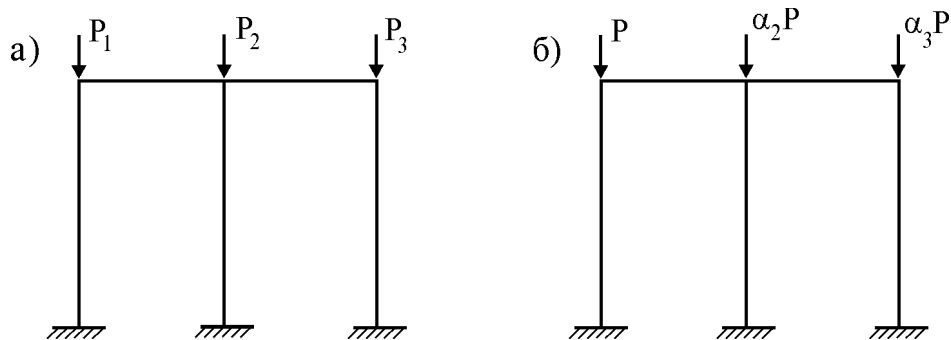


Рис. 25.5

Расчет на устойчивость можно вести тремя методами: статическим, энергетическим и динамическим.

Статический метод основан на составлении уравнений статики. Он базируется на критерии Эйлера: *критической силой является наименьшая сила, способная вызвать потерю устойчивости сооружения.*

Алгоритм статического метода состоит из трех этапов:

- задать системе малые перемещения;
- составить уравнения равновесия внешних и внутренних сил;
- из этих уравнений определить критическую силу.

Энергетический метод основан на исследовании полной потенциальной энергии системы и базируется на энергетическом критерии: *критической является сила, при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы внутренних сил, т.е. когда $\delta W = \delta V$.*

Алгоритм энергетического метода состоит из трех этапов:

- задать системе малые перемещения;
- определить приращения работ внешних и внутренних сил;
- из условия их равенства определить критическую силу.

Динамический метод основан на изучении колебаний системы. Он базируется на динамическом критерии: *критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равняется нулю.*

Алгоритм динамического метода также состоит из трех этапов:

- задать системе малые перемещения;
- записать уравнение движения системы;
- из условия равенства нулю частоты собственных колебаний системы определить критическую силу.

4. Расчет прямых стержней на устойчивость

Рассмотрим прямой стержень, сжимаемый вдоль оси продольной силой P (рис. 25.2 а). Изгиб, возникающий при этом, часто называется **продольным изгибом**. При достижении этой силы некоторого предельного значения $P_{кр}$ стержень теряет устойчивость первого рода. Его расчет будем вести методом начальных параметров, позволяющим рассматривать различным образом закрепленные по концам стержни по единой методике.

Метод начальных параметров основан на использовании четырех начальных параметров, зависящих от условий закрепления концов стержня:

$y(0) = y_0$ – начальное перемещение,

$y'(0) = y'_0$ – начальный поворот,

$M(0) = M_0$ – начальный момент,

$Q(0) = Q_0$ – начальная поперечная сила,

которые позволяют определять полное напряженно-деформированное состояние стержня. Например, перемещения и моменты в произвольном сечении стержня x определяются по следующим формулам

$$y(x) = y_0 + \frac{\sin \alpha x}{\alpha} y'_0 + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{\sin \alpha x - \alpha x}{\alpha^3 EI} Q_0;$$

$$M(x) = EI \alpha \sin \alpha x y'_0 + \cos \alpha x M_0 + \frac{\sin \alpha x}{\alpha} Q_0,$$

где величина

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

называется **параметром устойчивости**. Аналогичные формулы получаются и для величин $y(x)$, $Q(x)$.

Не приводя сами расчеты, приведем результаты определения критических сил $P_{кр}$ четырех различных стержней жесткости EI и длины l , сжатых продольной силой P (рис. 25.6).

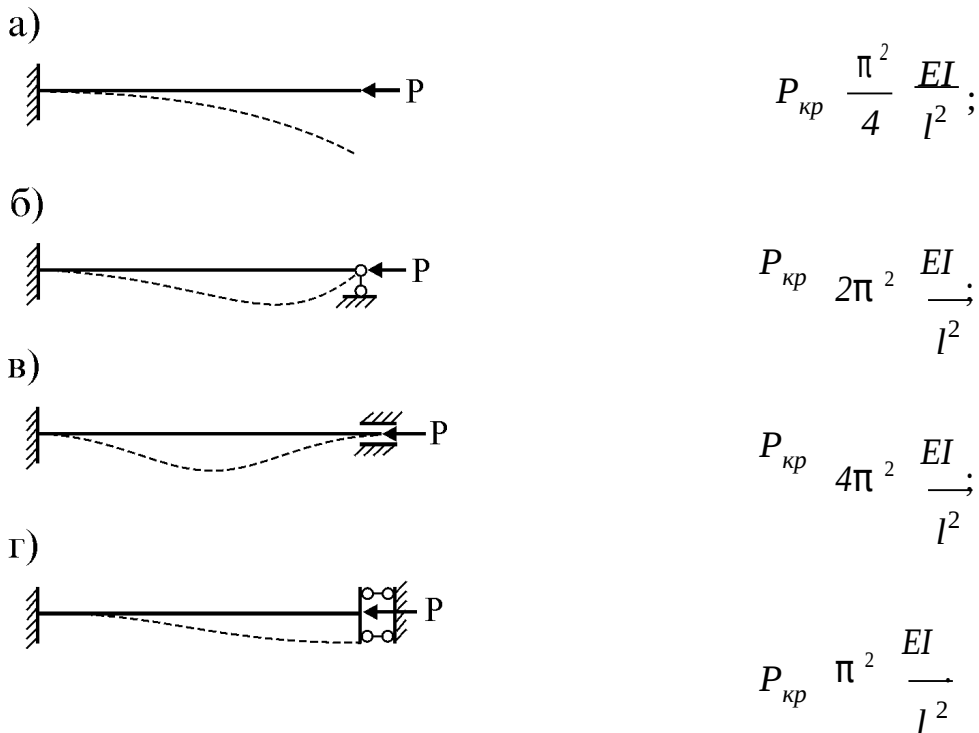


Рис. 25.6

Эти результаты показывают, что стержень со свободным концом (случай «а») воспринимает наименьшую нагрузку, и поэтому является

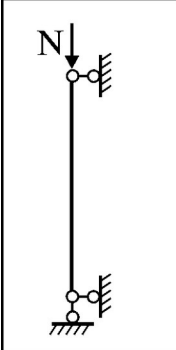
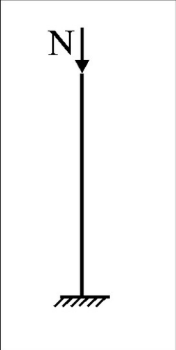

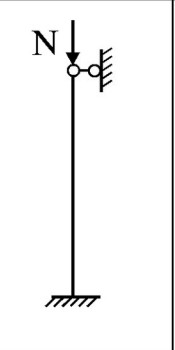
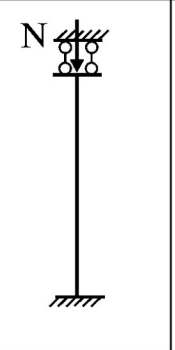
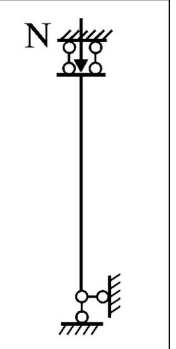
наиболее неустойчивым. Поэтому в сооружении нецелесообразно использование консольных элементов. Если у стержня заземлены оба конца (случай «в»), он воспринимает наибольшую (в четыре раза большую, чем шарнирно-опертая балка) нагрузку. Поэтому для устойчивости сооружения швы по концам колонн, применяемых при его строительстве, необходимо заливать бетоном (строительным раствором).

Шарнирно-опертая балка, а также критическая сила, определенная для нее, обычно рассматривается как основной случай расчета таких балок. Тогда критические силы для остальных случаев можно выразить через эту критическую силу по формуле, введенной Эйлером:

$$P_x = \frac{\pi^2 EI}{l^2 \mu}$$

Величина μ в этой формуле, учитывающая условия закрепления стержня, носит название **коэффициента приведения длины** и используется для приведения длины балки к основному случаю (к шарнирно-опертой балке). Ниже в табл. 3 даны различные варианты закрепления стержней и соответствующие коэффициенты приведения их длины.

Таблица 3
Коэффициенты приведения длины сжато-изогнутых стержней

					
$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=0,5$	$\mu=0,7$	$\mu=1$	$\mu=2$

В о п р о с ы

1. Что такое устойчивость?
2. Какие виды потери устойчивости существуют?
3. В чем состоит основная задача расчета на устойчивость?
4. Какие методы используются в расчетах на устойчивость?
5. Какие параметры используются в методе начальных параметров?
6. Что такое параметр устойчивости?
7. Что такое коэффициент приведения длины?
8. Чему равны критические силы стержней с различными закреплениями по концам?

Лекция 26

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Основные положения

Расчетные схемы большинства сооружений, в частности многопролетных и многоэтажных рам, являются статически неопределимыми. Для их расчета обычно используются методы сил и перемещений. Однако расчет рам на устойчивость методом сил вызывает значительные трудности. Поэтому рассмотрим использование метода перемещений.

Как известно, основной задачей расчета рам является определение их напряженно-деформированного состояния и последующая проверка условий прочности и жесткости. Иногда ограничиться только этим нельзя, т.к. могут возникать большие сжимающие усилия, приводящие к потере устойчивости сжатых элементов или всей рамы.

К примеру, расчет рамы на рис. 26.1 а на внешнюю нагрузку показывает, что в ее стержнях возникают сжимающие усилия (рис. 26.1 б). Они могут привести и к потере устойчивости рамы. Поэтому становится очевидным необходимость проверки рамы на устойчивость от действия этих сил (рис. 26.1 в). В некоторых случаях могут возникать задачи расчета на устойчивость и при узловом воздействии нагрузки (рис. 26.1 г).

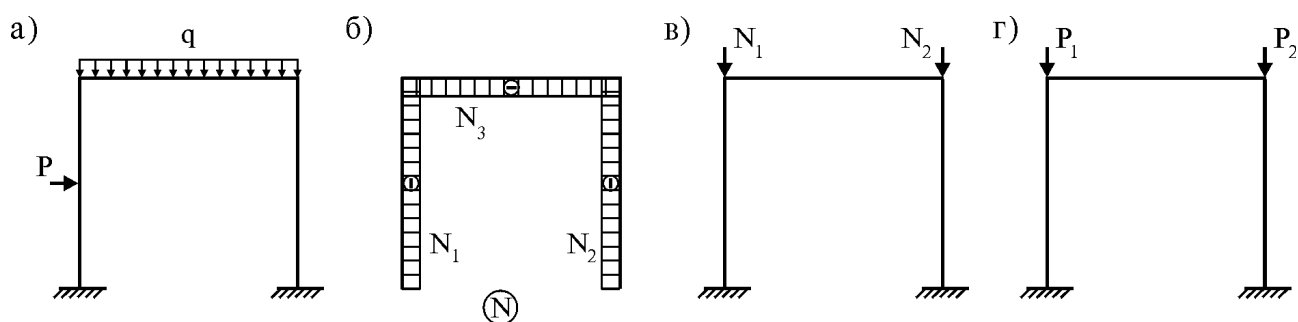


Рис. 26.1

Задача расчета на устойчивость в такой постановке не совсем корректна, так как учитывает только потерю устойчивости первого рода. В действительности, уже до его достижения может произойти потеря устойчивости второго рода. Но тем не менее, здесь мы будем рассматривать только упругую область работы материала и не будем касаться потери устойчивости второго рода.

Допустим, надо рассчитать раму на рис. 26.1 г. Если внешние силы меньше их критических значений, т.е. $P_1 < P_{1\text{кр}}$ и $P_2 < P_{2\text{кр}}$, рама устойчивости не теряет. В этом случае возникают только продольные усилия, изгибающие моменты и поперечные силы будут отсутствовать.

Если эти силы достигнут критических значений, т.е. $P_1 = P_{1\text{кр}}$ и $P_2 = P_{2\text{кр}}$, рама будет находиться в безразличном состоянии в условиях равновесия. Однако, даже при небольших отклонениях, появятся моменты и поперечные силы, которые будут оказывать влияние на устойчивое состояние рамы. Если же силы превысят их критические значения, т.е. $P_1 > P_{1\text{кр}}$ и $P_2 > P_{2\text{кр}}$, то рама потеряет устойчивость.

При расчете статически неопределимых систем методом перемещений принимаются следующие гипотезы:

- силы прилагаются только в узлах;
- сжимающие силы действуют только по осям стержней;
- при потере устойчивости деформации остаются в упругой области;
- из-за малости деформаций расстояния между узлами не меняются.

Эти гипотезы позволяют вести расчет рам на устойчивость по единой методике. При этом алгоритм метода перемещений существенно меняется.

2. Единичные состояния элементов основной системы

В единичных состояниях элементов основной системы метода перемещений требуется определить реакции и внутренние усилия в сжатых элементах. Эти задачи будем решать методом начальных параметров.

Пусть требуется определить опорные реакции и внутренние усилия заземленного с обоих концов стержня, один конец которого получает поворот на единичный угол (рис. 26.2).

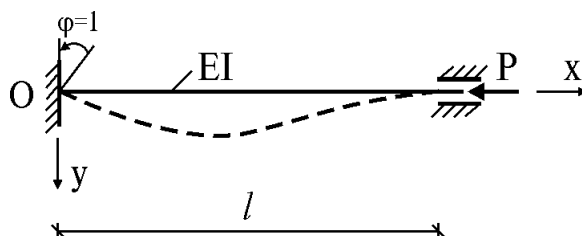


Рис. 26.2

В выбранной системе координат xOy определим граничные условия закрепления балки:

$$\text{при } x = 0: y(0) = y_0 = 0, \quad y'(0) = y'_0 = \phi = 1;$$

$$\text{при } x = l: y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Два начальных параметра нашлись сразу из граничных условий при $x = 0$. Два других определяются по граничным условиям при $x = l$. Например, получаем

$$M_0 = 4 \frac{EI}{l} \phi(v), \quad \text{где } \phi(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})}.$$

По формуле для момента, приведенной в прошлой лекции, определим

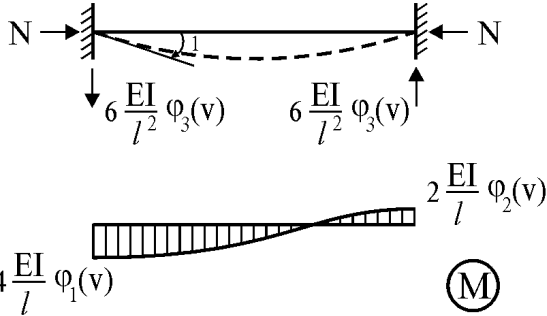
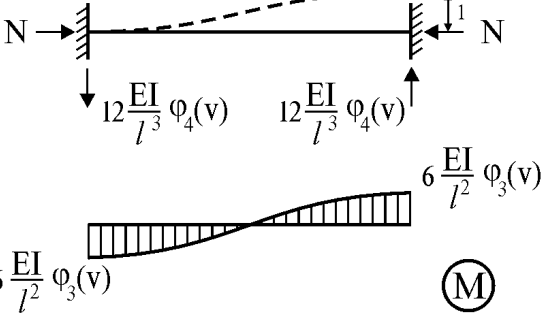
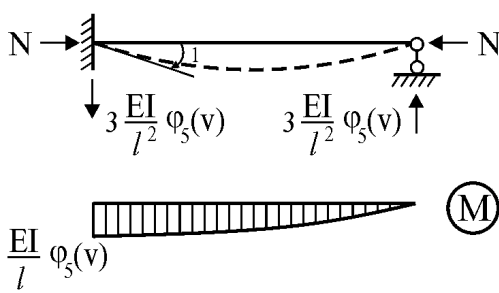
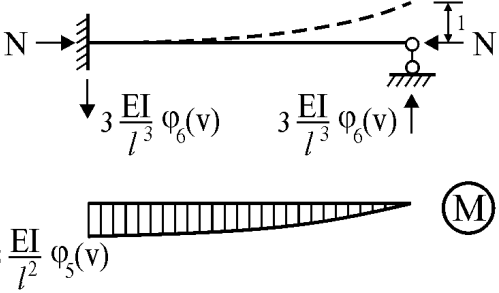
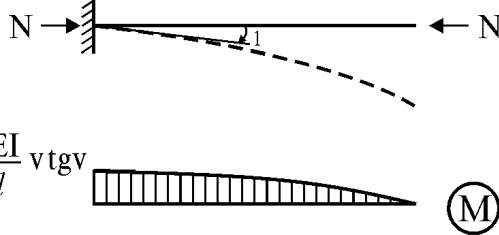
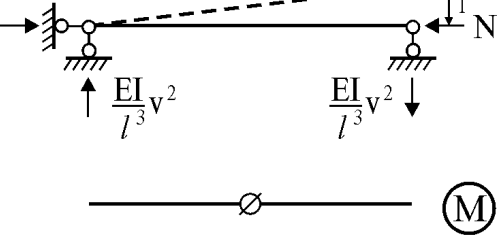
момент и на правом конце стержня:

$$M(l) = 2 \frac{EI}{l} \phi_2(v), \text{ где } \phi_2(v) = \frac{v(v \operatorname{ctg} \frac{v}{2} - \frac{1}{2})}{4 \sin v}.$$

Следует заметить, что перед моментами M_0 и $M(l)$ стоят коэффициенты, совпадающие с аналогичными моментами в левом и правом концах стержня в обычной таблице метода перемещений. Следовательно, присутствующие здесь функции $\phi_1(v)$, $\phi_2(v)$ учитывают особенность задачи – продольный изгиб стержня от действия осевой сжимающей силы.

Аналогично этому рассматриваются и другие единичные состояния стержней с другими закреплениями по концам. В табл. 4 даются результаты этих вычислений. В отличие от обычной таблицы, ее называют специальной таблицей метода перемещений.

Таблица 4
Реакции сжато-изогнутых стержней от единичных перемещений

Данная таблица широко используется при расчете рам и балок на устойчивость. Имеющиеся здесь шесть функций $\phi_1(v), \dots, \phi_6(v)$, две из которых приведены выше, обычно подсчитываются в табличной форме.

Рассмотрим небольшой пример расчета рамы (рис. 26.3 а) на устойчивость. Число ее неизвестных по методу перемещений $n = 1$. Выберем основную систему и построим в ней эпюру продольных сил N_0 (рис. 26.3 б, в). Параметры устойчивости стержней равны $v_1 = v_2 = 0$,

$v_3 = 3 \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Каноническое уравнение будет

$$r_{11} Z_1 = 0.$$

Т.к. внешняя нагрузка до момента потери устойчивости не вызывает изгиба элементов, то в нем $R_{1P} = 0$.

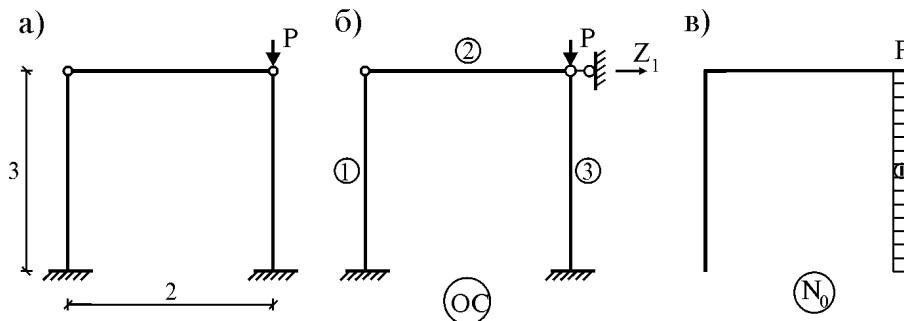


Рис. 26.3

Из канонического уравнения следует:

$$1) Z_1 = 0 \text{ или } 2) r_{11} = 0.$$

Так как первое условие дает завышенное значение критической силы, рассмотрим только второе условие, которое называется **уравнением устойчивости**.

Далее рассмотрим единичное состояние основной системы (рис. 26.4 а) и построим эпюру изгибающих моментов (рис. 26.4 б). При этом надо помнить, что в стержне 3 имеется сжимающее усилие (рис. 26.3 в), и поэтому эпюра изгибающих моментов для него строится по специальной таблице метода перемещений (табл. 4), а в стержнях 1 и 2 сжимающих сил нет, поэтому эпюры строятся по обычной таблице (табл. 2).

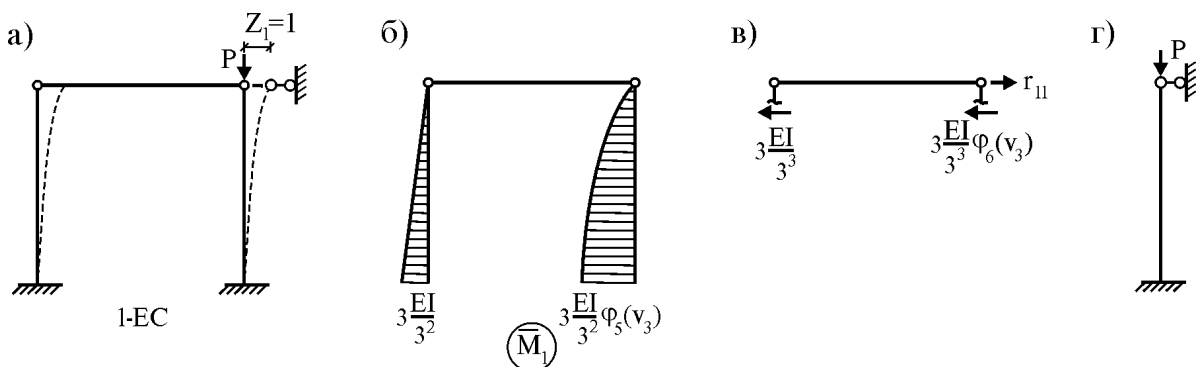


Рис. 26.4

Из уравнения устойчивости и рис. 26.4 в имеем

$$r_{11} - 1 - \phi_5(v_3) EI - \zeta^3 = 0.$$

Отсюда следует

$$1 - \phi_5(v_3) = 0 \text{ или } \phi_5(v_3) = 1.$$

По таблице для функции $\phi_5(v)$ определяем, что $v_3 = 2,2$.

Окончательно получаем

$$P_{кр} = v_{кр}^2 EI - \zeta^2 = 0,54 EI.$$

На основе решенной задачи определим **алгоритм расчета** рам на устойчивость методом перемещений:

1. Определение числа неизвестных.
2. Выбор основной системы.
3. Построение эпюры продольных сил N_0 в основной системе.
4. Определение параметров устойчивости стержней.
5. Запись системы канонических уравнений и уравнения устойчивости.
6. Рассмотрение единичных состояний основной системы.
7. Построение единичных эпюр изгибающих моментов.
8. Определение коэффициентов канонических уравнений.
10. Определение критических сил.

В о п р о с ы

1. Какие гипотезы используются при расчете рам на устойчивость?
2. Чем отличается специальная таблица метода перемещений от обычной таблицы?
3. Что такое уравнение устойчивости?
4. Как определяется алгоритм расчета рам на устойчивость?

ЛИТЕРАТУРА

1. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Уч. пос. – М.: АСВ, 1999. – 335 с.
2. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 2. Статически неопределимые системы: Уч. пос. – М.: АСВ, 2000. – 464 с.
3. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учебник для строит. спец. вузов. 9-е изд. – М.: Высш. шк., 2004. – 656 с.
5. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс: Учебник для вузов. 4-е изд. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
6. Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов. 3-е изд. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
7. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: АСВ, 1996. – 541 с.
8. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
9. Саргсян А.Е., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов. – М.: АСВ, 1998. – 320 с.
10. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
11. Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1985. – 255 с.
12. Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Динамика и устойчивость сооружений. Уч. пос. – Казань: КГАСУ, 2013. – 120 с.
13. Шакирзянов Р.А. Краткий курс лекций по строительной механике: Уч. пос. – Казань: КГАСУ, 2010. – 114 с.
14. Шакирзянов Р.А. Строительная механика: Учебник для вузов (на татар. яз.). – Казань: Магариф, 2008. – 383 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Лекция 1. Введение в строительную механику.....	4
Лекция 2. Кинематический анализ сооружений.....	11
Лекция 3. Расчет статически определимых систем на постоянную нагрузку.....	18
Лекция 4. Расчет ферм на постоянную нагрузку.....	23
Лекция 5. Расчет многодисковых систем.....	29
Лекция 6. Расчет статически определимых систем на подвижную нагрузку.....	33
Лекция 7. Расчет статически определимых систем на подвижную нагрузку (продолжение).....	39
Лекция 8. Определение перемещений.....	43
Лекция 9. Определение перемещений (продолжение).....	48
Лекция 10. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....	53
Лекция 11. Расчет статически неопределимых систем методом сил (продолжение).....	59
Лекция 12. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений.....	64
Лекция 13. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений (продолжение).....	69
Лекция 14. Расчет сооружений смешанным и комбинированным методами.....	76
Лекция 15. Расчет сооружений дискретным методом.....	81
Лекция 16. Расчет сооружений дискретным методом (продолжение).....	86
Лекция 17. Расчет пространственных систем.....	91
Лекция 18. Расчет сооружений методом конечных элементов (МКЭ).....	97
Лекция 19. Расчет сооружений МКЭ (продолжение 1).....	101
Лекция 20. Расчет сооружений МКЭ (продолжение 2).....	105
Лекция 21. Динамика сооружений.....	110
Лекция 22. Колебания систем с одной степенью свободы.....	116
Лекция 23. Колебания систем с одной степенью свободы (продолжение).....	121
Лекция 24. Колебания систем со многими степенями свободы.....	126
Лекция 25. Устойчивость сооружений.....	131
Лекция 26. Расчет на устойчивость методом перемещений.....	137
Литература	142
Содержание	143

