

## **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Учебное пособие

для студентов-бакалавров очной и заочной форм обучения  
строительных специальностей и направлений

**Ижевск 2022**

Учебное пособие включает основные сведения из таких дисциплин, как теоретическая механика, сопротивление материалов и детали машин в соответствии с государственными образовательными стандартами. Приведены примеры решения типовых задач по всем разделам.

# ВВЕДЕНИЕ

Механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение: способствует развитию логического мышления, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движущейся материи – механическому движению. Дисциплина "Техническая механика" является базой для создания надежных и экономичных конструкций, как на стадии проектирования, так и при изготовлении и эксплуатации.

К основным задачам этого предмета относится изучение:

- общих законов равновесия материальных тел;
- методов расчета элементов конструкций и машин на прочность, жесткость и устойчивость;
- законов движения материальных тел;
- устройства машин и механизмов, их деталей и области их применения.

Учебное пособие состоит из пяти разделов, включающих основы теоретической механики, сопротивления материалов, теории механизмов и машин, деталей машин. Изучение методов и приемов технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. На базе минимального количества материала обучаемому сообщаются такие знания, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Овладение основами технической механики позволят специалистам инженерно-экономических направлений грамотно проводить технико-экономическую экспертизу проектов.

Для изучения курса нужно иметь соответствующую математическую подготовку. Необходимо использовать положения и методы векторной алгебры, уметь дифференцировать функции одной переменной, знать основы теории кривых второго порядка, находить интегралы от простейших функций, решать дифференциальные уравнения.

В учебном пособии приведены примеры решения типовых задач по всем разделам. Решения задач сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студенту при самостоятельном изучении материала.

Учебное пособие будет полезным студентам немеханических специальностей, особенно студентам заочного отделения.

# 1. СТАТИКА

## 1.1. Основные понятия и аксиомы статики

Одним из основных понятий механики является сила. *Сила есть мера механического взаимодействия тел.* Она является векторной величиной и характеризуется численным значением (или модулем), точкой приложения и направлением (рис. 1.1).

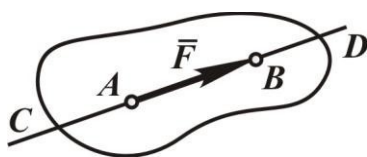


Рис. 1.1

силы принят один Ньютон [1Н].

Аналитически силу можно задать с помощью её проекций на оси

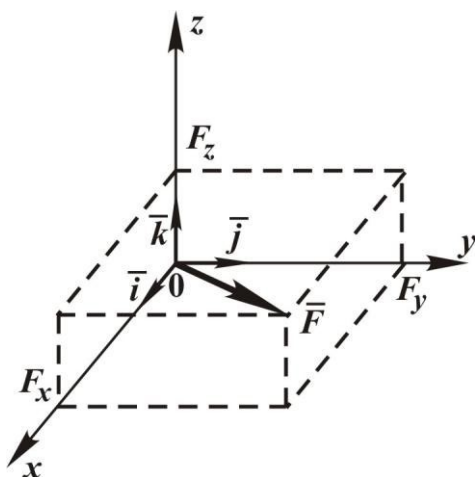


Рис. 1.2

Условные обозначения:  $\vec{F}$  сила (вектор),  $F$  модуль силы. Точка приложения силы и её направление определяют линию  $CD$  действия силы.

В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу

прямоугольной системы координат (рис. 1.2):

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z.$$

Здесь  $F_x, F_y, F_z$  - проекции силы на соответствующие оси;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  единичные векторы. Модуль  $F$  силы определяется как

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

В теоретической механике рассматриваются *абсолютно твёрдые*

*тела.* Это такие тела, в которых расстояние между двумя любыми точками не изменяется при действии сил.

В аксиомах статики формулируются законы, которым подчиняются силы, действующие на одно тело или приложенные к взаимодействующим телам.

Основными задачами статики абсолютно твёрдого тела являются: задача о приведении системы сил как данную систему сил заменить другой, чаще всего наиболее простой, ей эквивалентной; задача о равновесии каким условиям должна удовлетворять система сил, приложенная к телу, чтобы она была уравновешенной системой.

*Уравновешенной системой сил*, или системой сил, эквива-

лентной нулю, называется такая система сил, при действии которой на абсолютно твёрдое тело оно находится в покое.

Указанные задачи и позволяют решать аксиомы статики.

**Аксиома 1.** Две силы, приложенные к твёрдому телу, взаимно уравниваются в том случае, если их модули равны, а они направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3):

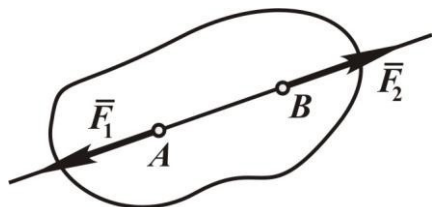


Рис. 1.3

Система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  эквивалентна нулю, то есть

$$F_1 = F_2.$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

**Аксиома 2.** Действие системы сил на твёрдое тело не изменится, если к ней присоединить или исключить систему взаимно уравнивающихся сил.

*Следствие.* Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия.

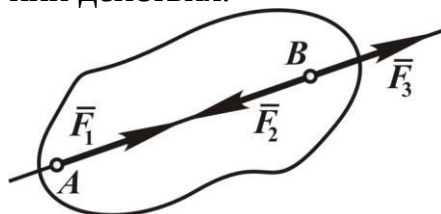


Рис. 1.4

Докажем это. Пусть сила  $\vec{F}_1$  приложена в точке A (рис. 1.4). Приложим в точке B по линии действия силы  $\vec{F}_1$  две уравнивающие силы  $-\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , причём сила  $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_3$ . Имеем

$$\vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3).$$

Так как силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  образуют уравнивающую систему сил, то, согласно аксиоме 2, их можно отбросить. Остаётся сила  $\vec{F}_3$ , равная силе  $\vec{F}_1$ , но приложенная в точке B, то есть силу  $\vec{F}_1$  перенесли вдоль её линии действия.

Ещё раз отмечаем, что обе аксиомы и следствие относятся только к абсолютно твёрдым телам.

**Аксиома 3.** Равнодействующая двух пересекающихся сил, действующих на тело, приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.5).

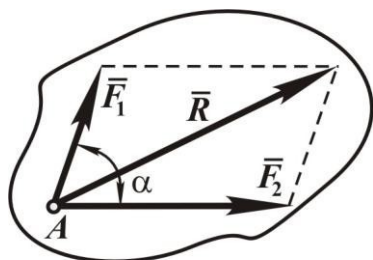


Рис. 1.5

Равнодействующая  $\vec{R}$  равна геометрической сумме сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , то есть

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

а её модуль определяется как

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}. \quad (1.1)$$

**Аксиома 4 (3-й закон Ньютона).** Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.6). Если тело I действует на тело II с силой  $\vec{F}_2$ , а тело II действует на тело I с силой  $\vec{F}_1$ , то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то есть

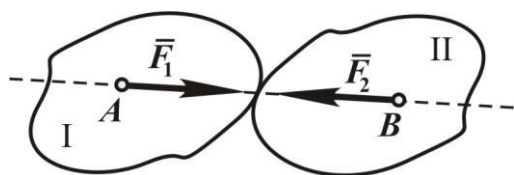


Рис. 1.6

$F_1 = F_2, \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

**Аксиома 5.** Равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать его точки и считать тело абсолютно твёрдым.

## 1.2. Активные силы и реакции связей

Все тела делятся на свободные и несвободные. Тело свободное, если его перемещения в пространстве ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется несвободным, а тела, ограничивающие перемещения рассматриваемого тела, являются *связями*. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются *реакциями связей*.

В механике пользуются принципом освобождения от связей: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить силами реакциями*.

Направление реакций определяется свойством связей и действующими силами. Рассмотрим некоторые виды связей.

**Гибкая нерастяжимая нить** (рис. 1.7). Реакция направлена вдоль нити по направлению к точке подвеса. Допускается реакцию изображать и на самой связи.

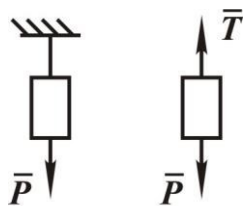


Рис. 1.7

Согласно аксиоме 4 сила взаимодействия стержня (реакция)  $\vec{R}$  должна быть направлена вдоль оси стержня  $AB$ . В случае криволинейного стержня - по прямой, соединяющей концы стержня.

**Несомый стержень**, шарнирно закреплённый по концам (рис. 1.8).

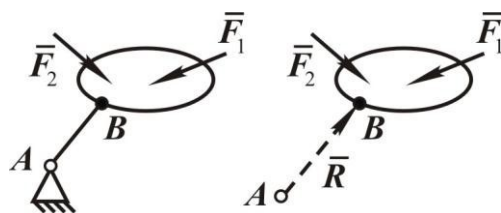


Рис. 1.8

Если тело опирается на идеально *гладкую поверхность* (без трения), то реакция  $\vec{N}$  направлена по общей нормали к соприкасаю-

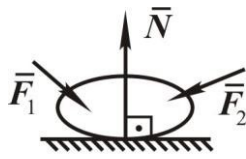


Рис. 1.9

щимся поверхностям (рис. 1.9). Здесь тело может свободно скользить вдоль поверхности, но не может перемещаться в направлении вдоль нормали к поверхности.

К аналогичному виду связи относится и соприкосновение балки с идеально гладкими поверхностями (рис. 1.10).

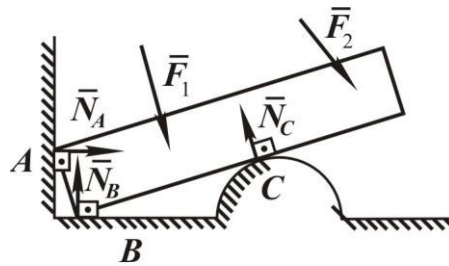


Рис. 1.10

*Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора*, ее условное обозначение представлено на рис. 1.11. Реакция  $\bar{N}$  направлена по нормали к опорной поверхности. Во всех рассмотренных видах связей направление реакций заведомо известно.

*Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.12) не позволяет телу совершать поступательное движение в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В общем случае направление реакции неизвестно и определяется действующими силами. Для удобства решения практических задач реакцию изображают в виде двух составляющих, направленных по перпендикулярным друг к другу осям, при этом

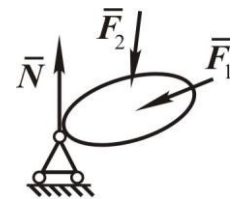


Рис. 1.11

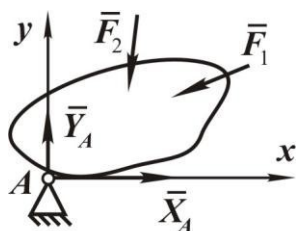


Рис. 1.12

а модуль

$$\bar{R} = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2},$$

а модуль

$$R_A = \sqrt{X_{AA}^2 + Y_{AA}^2}.$$

Все силы, действующие на несвободное тело, можно разделить на две категории. Одну категорию составляют силы, не зависящие от связей, и их называют активными силами, другую категорию – реакциями связей. Реакции связей носят пассивный характер, они возникают, если действуют активные силы. Поэтому реакции связей ещё называют пассивными силами.



### 1.3. Система сходящихся сил

**Приведение и условия равновесия.** Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке.

Докажем теорему: *система сходящихся сил приводится к одной силе (равнодействующей), которая равна геометрической сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.*

Пусть задана система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , приложенных к абсолютно твёрдому телу (рис.1.13).

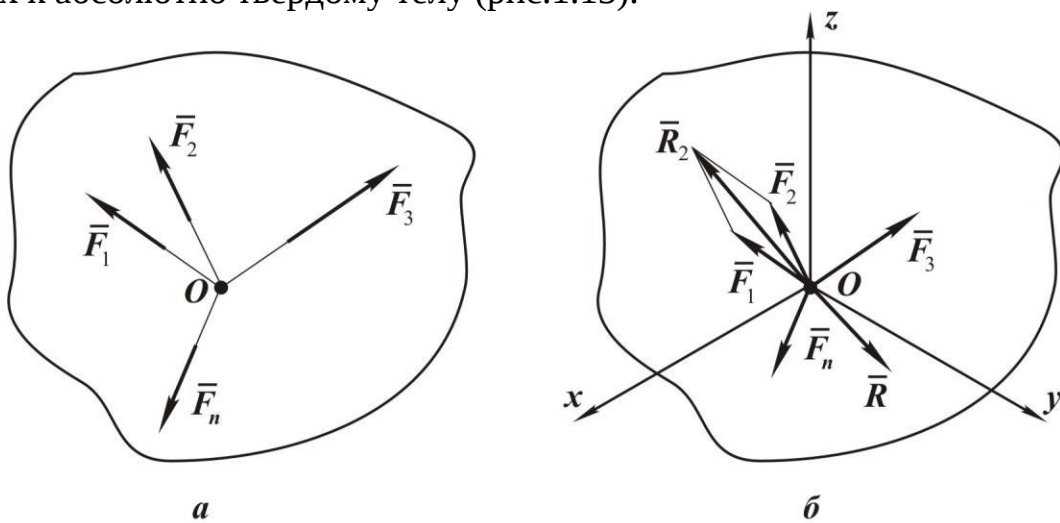


Рис. 1.13

Перенесём точки приложения всех сил по их линиям действия в точку пересечения  $O$ .

На основании аксиомы 3 складываем силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , получаем их равнодействующую

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Затем, складывая  $\vec{R}_2$  с силой  $\vec{F}_3$ , найдём

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Таким образом, дойдём до последней силы  $\vec{F}_n$ , получив равнодействующую  $\vec{R}$  всей системы  $n$  сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.2)$$

Этим соотношением и доказывается справедливость сформулированной теоремы.

Вместо параллелограммов можно строить силовые многоугольни-  
ки

• Пусть система состоит из трёх сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (рис. 1.14).

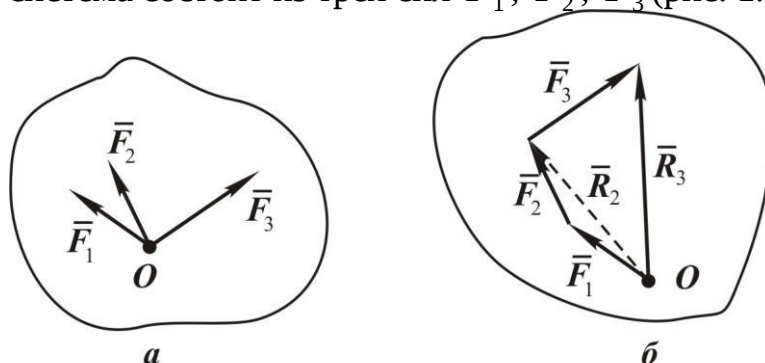


Рис. 1.14

Изображаем вектор  $\vec{F}_1$ . К концу вектора  $\vec{F}_1$  прикладываем начало вектора силы  $\vec{F}_2$ . Вектор, соединяющий точку  $O$  и конец вектора  $\vec{F}_2$ , будет вектор  $\vec{R}_2$ . Далее, аналогично отложим вектор силы  $\vec{F}_3$ , получим равнодействующую  $\vec{R}_3$ .

Полученный многоугольник может быть плоским и пространственным в зависимости от расположения сил рассматриваемой системы; он называется *силовым многоугольником*.

Наиболее общим способом определения модуля и направления равнодействующей является *аналитический способ*.

Поместив начало прямоугольной системы координат в точку  $O$  (рис. 1.13), равнодействующую  $\vec{R}$ , как и любую силу, можно представить как

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k},$$

где  $R_x, R_y, R_z$  проекции равнодействующей. Используя выражение (1.2), получаем:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}; \\ R_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}; \\ R_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, *проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси*.

Модуль равнодействующей равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \Phi_{k\xi}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \Phi_{k\psi}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \Phi_{k\zeta}\right)^2}. \quad (1.4)$$

Система сходящихся сил, как было доказано, приводится к одной силе равнодействующей

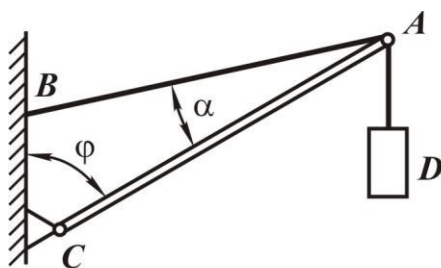
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n,$$

следовательно, для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю, то есть

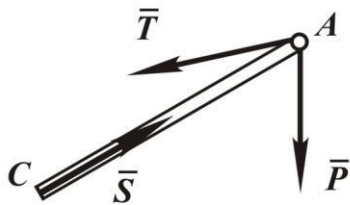
$$\bar{R} = 0. \quad (1.5)$$

Учитывая (1.3), получаем аналитические условия равновесия:

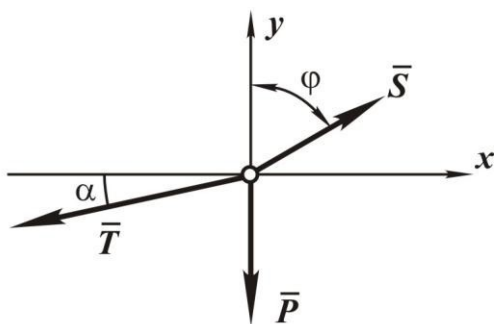
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + \dots + F_{nx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + \dots + F_{ny} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} + \dots + F_{nz} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$



а



б



в

Рис. 1.15

**Пример.** На рис. 1.15 изображена часть крана, состоящая из стрелы AC, троса AB и подвешенного груза D.

то есть для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенство нулю алгебраических сумм проекций всех сил системы на каждую из координатных осей.

Условия равновесия (1.6) позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

Практическое значение имеет другая возможность использования этих условий, а именно для определения реакций связей, когда активные силы известны.

Число неизвестных должно быть не больше числа уравнений. В случае равновесия системы сходящихся сил силовой многоугольник должен быть замкнутым.

Пренебрегая весом троса и стрелы, определить натяжение троса

$T$  и усилие в стреле  $S$ , если известно, что угол  $60^\circ$ , угол  $15^\circ$ , а масса груза  $m = 6$  т.

Рассмотрим равновесие стрелы.

В точке  $A$  к ней приложена активная сила  $\bar{P}$  – сила тяжести груза (см. рис. 1.15,б). В той же точке к ней приложена реакция  $\bar{T}$  троса, и в точке  $C$  приложена реакция опоры  $\bar{S}$ , направленная вдоль стрелы, так как весом стрелы пренебрегаем. Начало реакции  $\bar{S}$  перенесем в точку  $A$ , получаем сходящуюся систему сил.

Для определения реакций применяем вначале аналитический способ. Для этого берём систему координат и составляем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= S \sin 60^\circ - T \cos 15^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= S \cos 60^\circ - P - T \sin 15^\circ = 0; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} S &= P \frac{\cos 15^\circ}{\cos 75^\circ} = 221,54 \text{ кН}; \\ T &= P \frac{\sin 60^\circ}{\cos 75^\circ} = 199,85 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Применим *геометрический способ*.

Система трёх указанных сил находится в равновесии, следовательно, силовой многоугольник должен быть замкнутым.

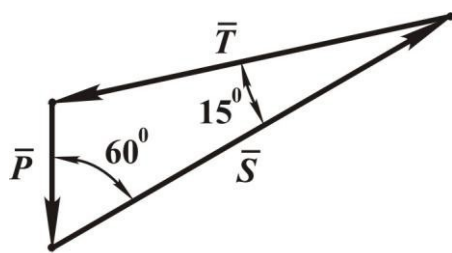


Рис. 1.16

Построение многоугольника следует начинать с известной силы  $\bar{P}$  (рис. 1.16).

Из её начала проводится прямая, параллельная линии действия силы  $\bar{T}$ , а из её конца – прямая, параллельная

линии действия силы  $\bar{S}$ . Точка пересечения и определяет силы  $\bar{S}$  и  $\bar{T}$ .

Для определения величины  $\bar{S}$  и  $\bar{T}$  применяем теорему синусов:

$$\begin{aligned} S &= P \frac{\sin 105^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{mg \sin 105^\circ}{\sin 15^\circ} = 221,54 \text{ кН}; \\ T &= P \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{mg \sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = 199,85 \text{ кН}. \end{aligned}$$

При использовании аналитического способа для определения реакций связей может получиться знак минус у реакций, это говорит о том, что реакция в действительности направлена в противоположную сторону.

#### 1.4. Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, то есть на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда вращение, совершаемое силой, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Момент силы характеризует её вращательное действие. Момент силы относительно точки обозначается символом  $\bar{M}_O(\bar{F})$ , здесь  $O$  – точка, относительно которой определяется момент (рис. 1.17).

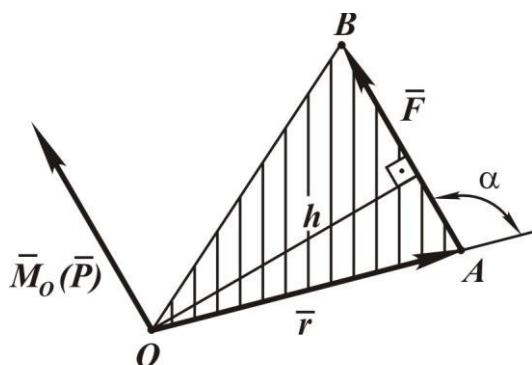


Рис. 1.17

Согласно определению модуль момента

$$M_O(\bar{F}) = F h, \quad (1.7)$$

где  $h$  – плечо.

Докажем, что если точка  $A$  приложения силы определяется радиусом-вектором  $\bar{r}$ , то справедливо соотношение

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (1.8)$$

то есть момент силы относительно точки определяется как векторное произведение радиуса-вектора  $\bar{r}$  на вектор силы  $\bar{F}$ . Модуль векторного произведения

$$|\bar{r} \times \bar{F}| = rF \sin \alpha = Fh, \text{ так как } h = r \sin \alpha.$$

Следовательно, модуль указанного векторного произведения совпадает с модулем момента  $\bar{M}_O(\bar{F})$ . Вектор векторного произведения  $\bar{r} \times \bar{F}$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\bar{r}$  и  $\bar{F}$ , в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора  $\bar{r}$  к вектору  $\bar{F}$  представляется происходящим против хода часовой стрелки. Итак, вектор момента силы относительно точки

$M_0(\vec{F})$  совпадает по направлению с вектором векторного произведения  $\vec{r} \times \vec{F}$ . Таким образом, формула (1.8) полностью определяет модуль и направление момента силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

На рис. 1.18 приведены случаи определения плеча  $h$ .

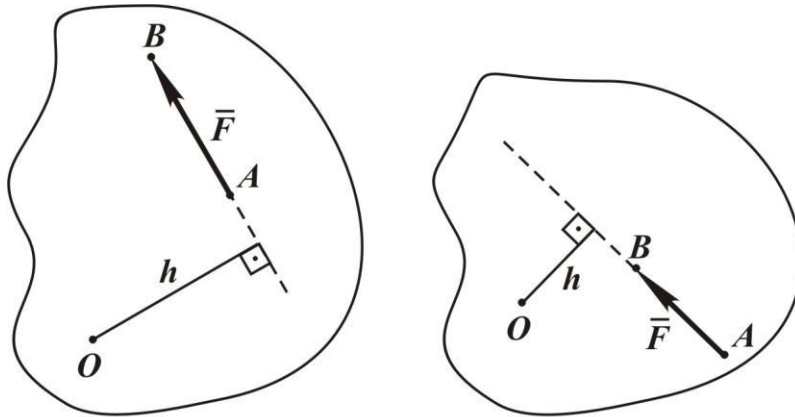


Рис. 1.18

Для наглядности на рис. 1.19 изображены параллелепипеды, по граням которых направлены силы, показаны направления моментов сил и определены их модули:

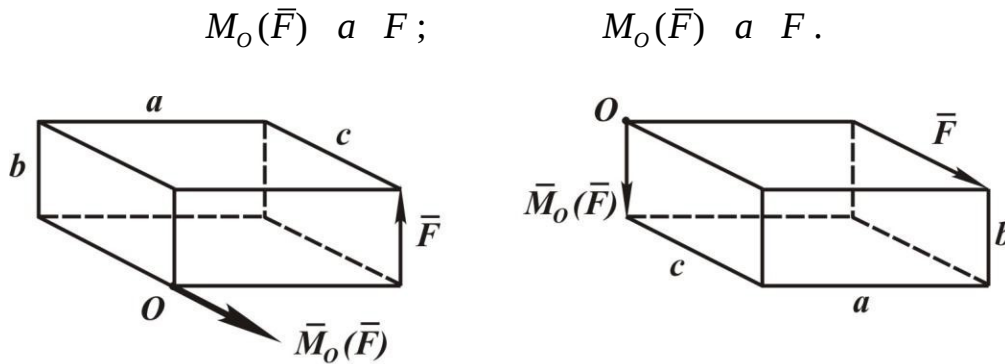


Рис. 1.19

### 1.5. Момент силы относительно оси

*Если момент силы относительно точки — векторная величина, то момент силы относительно оси — алгебраическая величина.*

Определим момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ , для чего силу  $\vec{F}$  (см. рис. 1.20) спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси, в нашем случае на плоскость  $Oxy$ .

Проекцию силы  $\vec{F}$  на плоскость  $Oxy$  обозначим  $\vec{F}_{xy}$ , она также векторная величина.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ , с учётом формулы (1.7), определяется так:

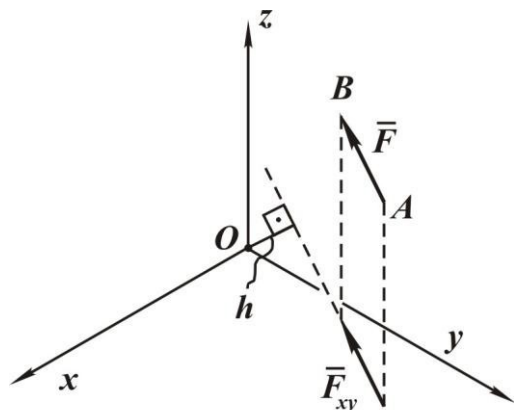


Рис. 1.20

$$M_z(\vec{F}) = M_{Oz}(\vec{F}_{xy}) = F_{xy} h, \quad (1.9)$$

где  $h$  — плечо силы  $F_{xy}$  относительно точки  $O$ ,  $F_{xy}$  — модуль проекции силы  $\vec{F}$  на плоскость  $Oxy$ , знак «плюс» в формуле (1.9) берётся в том случае, когда сила  $\vec{F}_{xy}$  создаёт вращение вокруг оси  $z$  против хода часовой стрелки, знак «минус» — по ходу.

Формула (1.9) позволяет вычислить момент силы относительно оси. Для чего необходимо:

- 1) выбрать на оси произвольную точку и построить плоскость, перпендикулярную оси;
- 2) спроецировать на эту плоскость силу;
- 3) определить плечо  $h$  проекции силы.

Момент силы относительно оси равен произведению модуля проекции силы на плоскость на её плечо, взятое с соответствующим знаком.

Из формулы (1.9) следует, что момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

- 1) когда проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю, то есть когда линия действия силы и ось параллельны;
- 2) когда плечо  $h$  проекции силы равно нулю, то есть когда линия действия силы пересекает ось.

Оба эти случая можно объединить: *Момент силы относительно оси равен нулю тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости.*

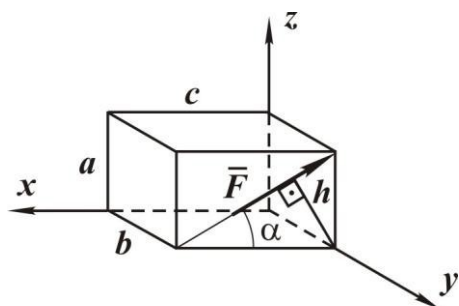


Рис. 1.21

Определим моменты силы относительно координатных осей (рис. 1.21), данные приведены на рисунке:

$$M_x(\vec{F}) = F \sin \alpha \cdot b;$$

$$M_y(\vec{F}) = F \cdot h;$$

$$M_z(\vec{F}) = F \cos \alpha \cdot b.$$



## 1.6. Момент пары сил

Парой сил называются две параллельные силы, равные по модулю, но противоположные по направлению (рис. 1.22).

Пара сил обозначается  $(\vec{F}, \vec{F}')$ .

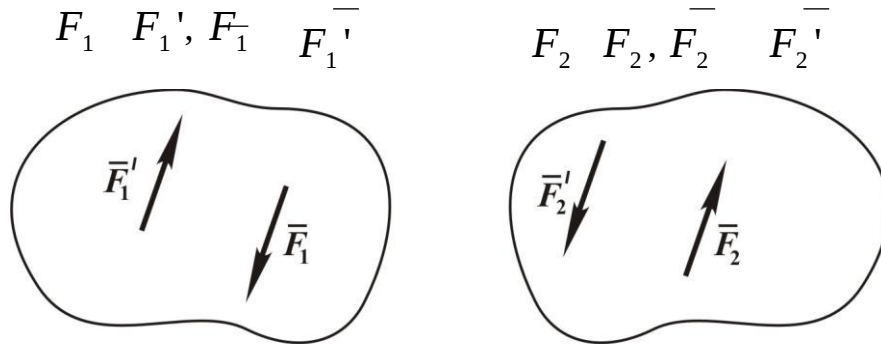


Рис. 1.22

Введём понятие момента пары сил. Вначале определим сумму моментов сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$ , составляющих пару, относительно произвольной точки  $O$  (рис. 1.23.):

$$\begin{aligned} & \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}; \quad \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{OB} \times \vec{F}'; \\ & \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}', \end{aligned}$$

так как  $\vec{F}' = -\vec{F}$ , то

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F} - \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F};$$

учитывая, что  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ , получаем

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{BA} \times \vec{F}. \quad (1.10)$$

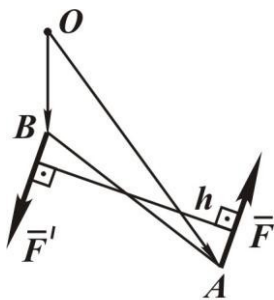


Рис. 1.23

В правую часть полученного выражения не входит точка  $O$ , следовательно, сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой вычисляются моменты сил. Векторное произведение  $\vec{BA} \times \vec{F}$  и называется моментом пары  $(\vec{F}, \vec{F}')$ .

На основании этого даём определение момента пары:

*Момент пары есть вектор, по модулю равный произведению модуля одной из сил на плечо пары, то есть на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, и направленный перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда вращение пары видно происхо-*

*дящим против хода часовой стрелки.*

Итак, момент пары  $(\vec{F}, \vec{F}')$   $\vec{M}_0(\vec{F}, \vec{F}') = \overline{BA} \times \vec{F}$ , а его модуль

$M_0(\vec{F}, \vec{F}') = F h$ , где  $h$  плечо пары.

Для наглядности на рис. 1.24 приведены два случая направления моментов пар:

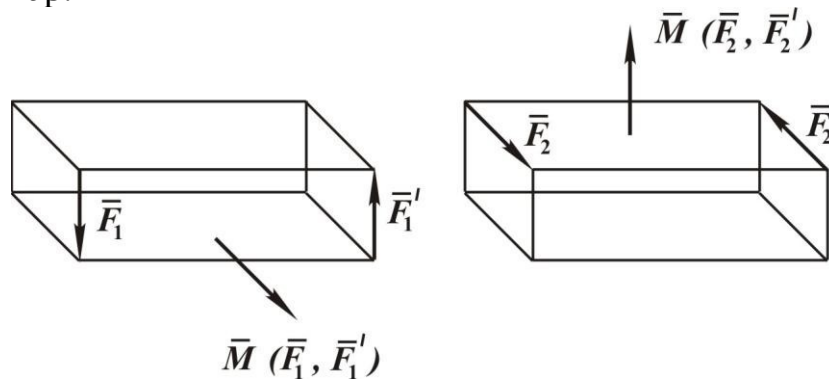


Рис. 1.24

Момент пары представляет свободный вектор, линия действия его не определена. Для того чтобы пара сил составляла уравновешенную систему, необходимо и достаточно, чтобы момент пары равнялся нулю. Дей-

ствительно, если момент пары равен  $M = F h = 0$ , то либо  $F = 0$ , нулю,

то есть нет сил, либо плечо пары  $h$  равно нулю. Если  $h = 0$ , то силы действуют по одной прямой и так как они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, то на основании аксиомы 1 они составляют уравновешенную систему сил.

*Момент пары полностью определяет механическое действие пары на абсолютно твердое тело.* Система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар. Система пар эквивалентна нулю, если момент результирующей пары равен нулю.

### 1.7. Приведение и равновесие пространственной системы сил

Дана произвольная пространственная система сил  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ . Сумму этих сил

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

называют *главным вектором системы сил*.

Сумму моментов сил относительно какого-либо центра

$$M_O \quad M_O(F_k)$$

$k \ 1$

называют *главным моментом системы сил* относительно этого центра.

Докажем теорему о приведении пространственной системы сил.

Любую пространственную систему сил, в общем случае, можно привести к одной силе, приложенной в центре приведения и равной главному вектору данной системы сил, и к одной паре сил, момент которой равен главному моменту этих сил относительно центра приведения.

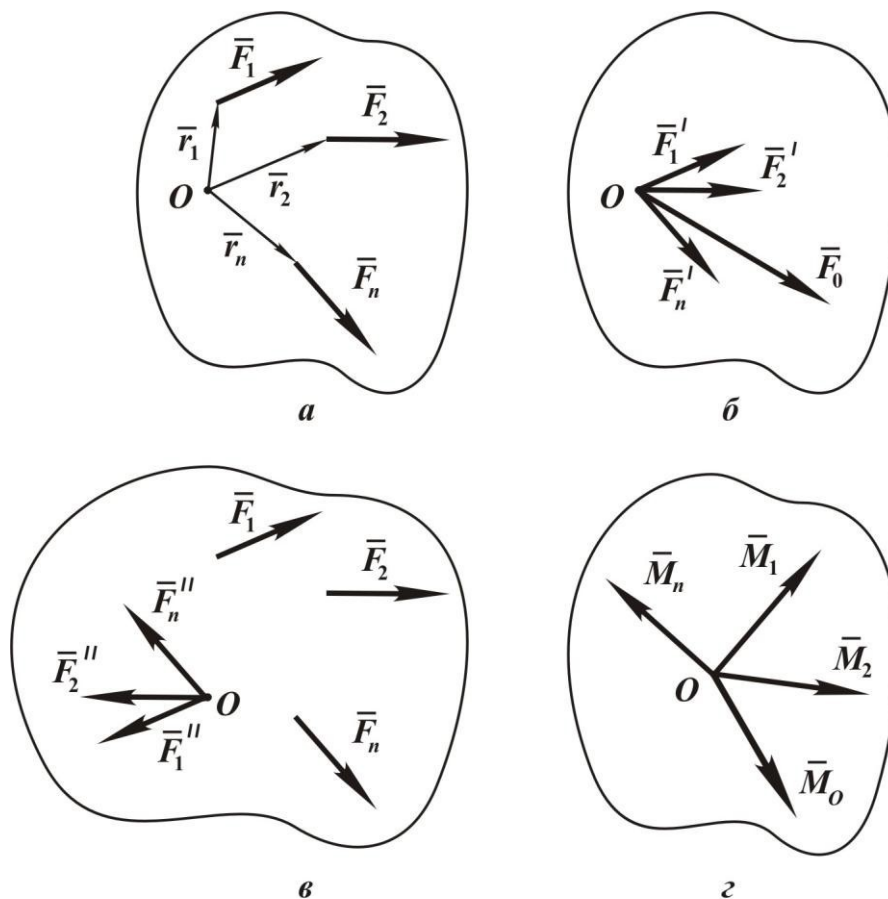


Рис. 1.25

Пусть дана произвольная пространственная система сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  (рис. 1.25,а). Приведём эту систему сил к центру  $O$ .

Положения точек приложения сил определим радиусами-векторами  $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$ .

Переносим все силы параллельно самим себе так, чтобы их точки приложения совпали с точкой  $O$ . При этом получим сходящуюся систему (рис. 1.25,б), которая приводится к одной равнодействующей силе, равной главному вектору

$$\bar{F}_0 \quad \bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \dots \quad \bar{F}_n \quad \bar{F}_k \cdot$$

При параллельном переносе сил возникают ещё соответствующие пары  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1)$   $(\bar{F}_2, \bar{F}_2)$ , ...,  $(\bar{F}_n, \bar{F}_n)$  (см. рис. 1.25,б).

Моменты этих пар равны моментам сил относительно центра  $O$ :

$$\bar{M}_1 = M(\bar{F}_1, \bar{F}_1) = \bar{r}_1 \bar{F}_1 = \bar{M}_O(\bar{F}_1);$$

.....

$$\bar{M}_n = M(\bar{F}_n, \bar{F}_n) = \bar{r}_n \bar{F}_n = \bar{M}_O(\bar{F}_n).$$

Система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар, а так как момент каждой пары равен моменту силы относительно точки приведения, то момент результирующей пары равен главному моменту (см. рис. 1.25,г)

$$\bar{M}_O = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \bar{F}_k.$$

Итак, доказано, что любую пространственную систему сил в общем случае можно привести к одной силе

$$\bar{F}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \tag{1.11}$$

и к одной паре с моментом

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k). \tag{1.12}$$

Параллельный перенос силы, применённый здесь, например силы  $\bar{F}_1$  (рис. 1.26), соответствует тому, что в точке приведения  $O$  прикладываются две уравновешенные силы, причём модули этих сил равны модулю  $\bar{F}_1$ , а их линии действия параллельны ей. При этом получим систему сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1, \bar{F}_1'')$ , эквивалентную  $\bar{F}_1$  и паре сил

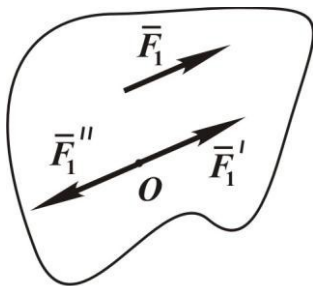


Рис. 1.26

силе  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1'')$ .

Установим условия равновесия пространственной системы сил.

Если

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0,$$

то сходящаяся система сил эквивалентна нулю, а если

$$M_O \quad M_O(F_k) \quad 0 ,$$

k 1

то система пар эквивалентна нулю.

Таким образом, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы сил равнялись нулю, то есть

$$\bar{F}_0 = 0, \quad \bar{M}_0 = 0. \quad (1.13)$$

В проекциях на оси прямоугольной системы координат условия равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \\ M_{Ox} &= \sum_{k=1}^n M_{Ox}(F_k) = 0; \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^n M_{Oy}(F_k) = 0; \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^n M_{Oz}(F_k) = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

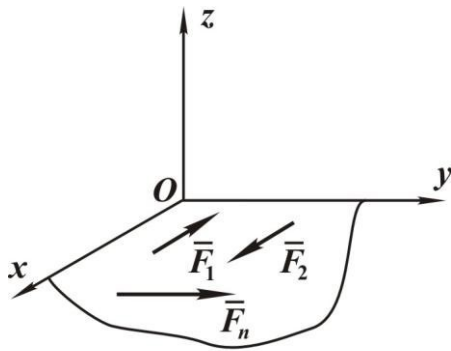


Рис. 1.27

Частным случаем является плоская система сил. Пусть все силы расположены в плоскости  $xOy$  (рис. 1.27). Из трёх первых уравнений равновесия (1.14) пространственной системы сил для плоской системы останутся уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Третье уравнение (1.14) будет тождеством. Из трёх последних уравнений остаётся только уравнение

$$\sum_{k=1}^n M_{Oz}(F_k) = 0. \quad (1.16)$$



Следовательно, при рассмотрении плоской системы сил имеется возможность найти три неизвестных.

**Пример.** На балку, изображённую на рис. 1.28, действует сосредоточенная сила  $F = 2$  кН, равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q = 0,5$  кН/м и пара сил с моментом  $M = 4$  кН м. Угол  $30^\circ$ ,  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 5$  м.

Требуется определить реакции опор.

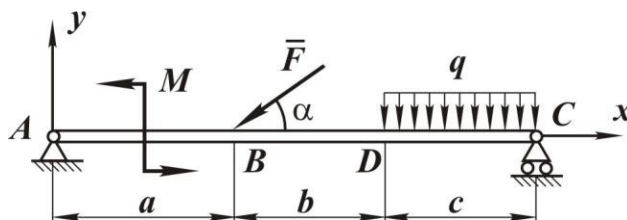


Рис. 1.28

**Решение.** Распределённую нагрузку заменяем равнодействующей  $Q = qc$ , приложенной в середине отрезка  $DC$ . Освобождаем балку от связей, заменяя их действие реакциями  $\bar{R}_C, \bar{X}_A, \bar{Y}_A$ .

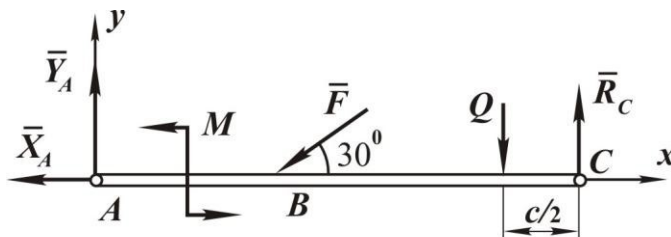


Рис. 1.29

Составляем уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} \quad X_A - F \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} \quad Y_A - F \sin 30^\circ - Q + R_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az} \quad M - F a \sin 30^\circ - Q(a + b + \frac{c}{2}) + R_C(a + b + c) = 0.$$

Подставляем числовые значения в уравнения равновесия:

$$X_A = F \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \text{ кН};$$

$$R_C = \frac{F a \sin 30^\circ + Q(a + b + \frac{c}{2}) - M}{a + b + c} = 1,675 \text{ кН};$$

$$Y_A = F \sin 30^\circ + Q - R_C = 1,825 \text{ кН}.$$

Реакция  $X_A$  получилась со знаком минус, это говорит о том, что

в действительности она направлена в противоположную сторону.

## 2. КИНЕМАТИКА

### 2.1. Кинематика точки

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются ее положение, скорость и ускорение. Поэтому к задачам кинематики точки относятся определение способов задания движения и нахождение методов определения скорости и ускорения. Рассмотрим способы задания движения. Вначале определим, что значит задать движение.

*Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным,*

*если известен способ, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени.*

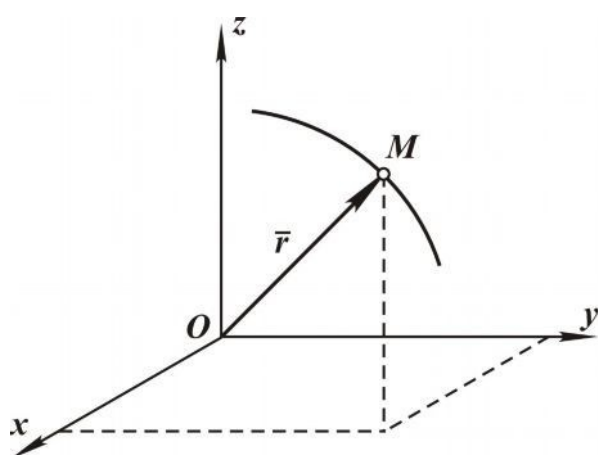


Рис. 2.1

*Векторный способ.* Положение точки в пространстве задано, если ее радиус-вектор  $\vec{r}$ , проводимый из некоторого заданного центра, известен как функция времени, то есть .

При этом предполагается, что имеется возможность определить его модуль и направление в любой момент времени. Это можно сделать, если избрана какая-либо система координат, например прямоугольная декартова система координат, как это показано на рис. 2.1. Для решения конкретных задач переходят от векторного способа к координатному или естественному способам задания движения.

*Координатный способ.* Способ задания движения точки с помощью координат как известных функций времени называется координатным способом. Наиболее распространенной является прямоугольная декартова система координат. Движение точки задается с помощью координат  $x, y, z$  (рис.2.1) как известных функций времени, то есть

$$\begin{matrix} x & x(t), & y & y(t), & z & z(t) \end{matrix} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) движения точки представляют собой и уравнение траектории точки, но только в параметрической форме, где роль параметра играет время  $t$ . Для определения уравнения траектории в координатной форме необходимо исключить время  $t$ .

*Траекторией точки называется непрерывная кривая, ко-*

торию описывает точка при своем движении.

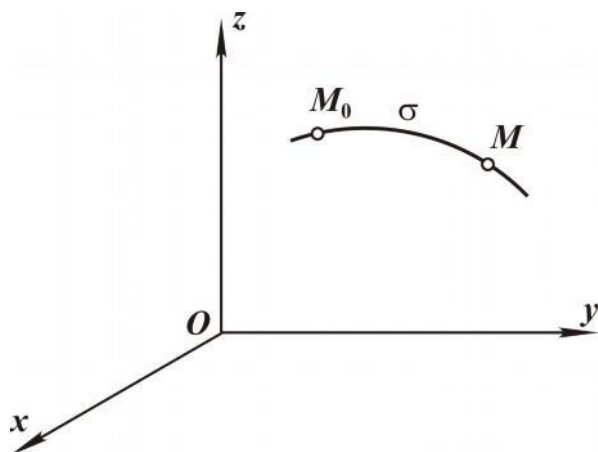


Рис. 2.2

*Естественный способ.*

При естественном способе задания движения известны уравнения траектории и закон движения точки по траектории.

Пусть точка  $M_0$  начало отсчета. Выбрав направление положительного отсчета дуги по траектории, определяем положение точки  $M$  в любой момент времени как функцию изменения дуги:

$$M_0 M$$

$$(t). \quad (2.2)$$

(рис 2.2) во времени, то есть

Зависимость (2.2) есть закон движения. Все рассмотренные способы задания движения взаимосвязаны.

### 2.1.1. Скорость точки

Определим скорость точки, рассматривая векторный способ задания ее движения. Пусть в момент времени  $t$  положение точки определяется радиусом  $\vec{r}(t)$ , а в момент  $(t + \Delta t)$  радиус-вектором  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Вектор  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  есть вектор перемещения точки за время  $\Delta t$  (рис. 2.3).

Вводим понятие средней скорости,

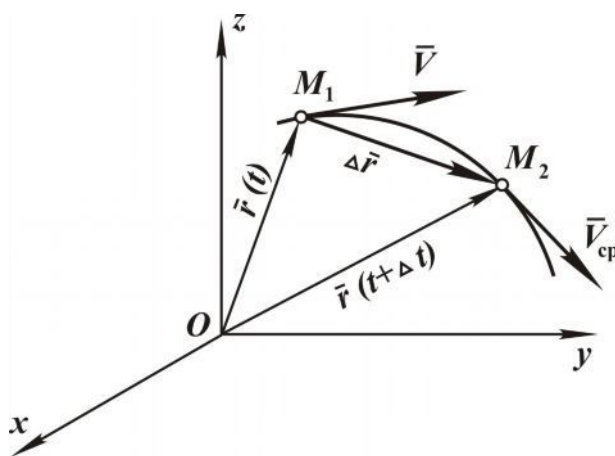


Рис. 2.3

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Скорость точки в данный момент времени есть предел отношения вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который произошло это перемещение при  $\Delta t \rightarrow 0$ , стремящемся к нулю, то есть

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

а это есть производная  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Таким образом, скорость точки равна производной радиус-вектора точки по времени, а именно

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.4)$$

и направлена по касательной к траектории в сторону движения. Единицами измерения скорости являются м/с, км/ч.

### Определение скорости при координатном способе задания движения

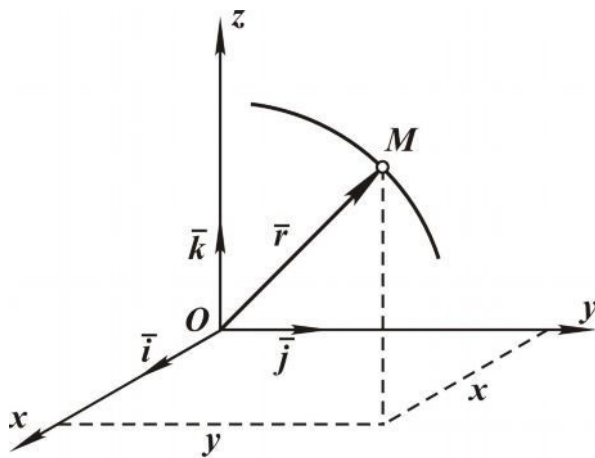


Рис. 2.4

Пусть движение точки задано в декартовой системе координат, являющейся неподвижной (рис. 2.4), то есть заданы координаты точки как функции времени:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t).$$

Используя единичные векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  осей  $x, y, z$ , определяем радиус-вектор:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.5)$$

и далее вектор скорости:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \quad (2.6)$$

т. к. единичные векторы данной неподвижной системы координат постоянны.

Вектор скорости  $\vec{V}$ , как и любой вектор, можно также представить через его проекции, используя единичные векторы, то есть

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}.$$

Сравнивая два последних выражения, получаем, что проекции скорости  $V_x, V_y, V_z$  на координатные оси будут равны

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.7)$$

то есть проекция скорости точки на координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей этой оси координаты.

Производную по времени в теоретической механике обозначают точкой сверху, поэтому можно еще записать

$$V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}. \quad (2.8)$$

Вектор скорости определяется модулем

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (2.9)$$

и направлением, которое задается направляющими косинусами:

$$\cos(\alpha, \vec{V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\beta, \vec{V}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\gamma, \vec{V}) = \frac{V_z}{V}. \quad (2.10)$$

### Определение скорости при естественном способе задания движения

Пусть точка  $M$  движется по некоторой кривой (рис.2.5). За промежуток времени  $t$  точка перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  по дуге.

Дуга обозначается как  $M_1M_2$ , а перемещение –  $r$ . Зная, что

$$V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{t},$$

запишем его в другом виде:

$$V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{t}.$$

Так как предел отношения дуги к стягивающей ее хорде равен по

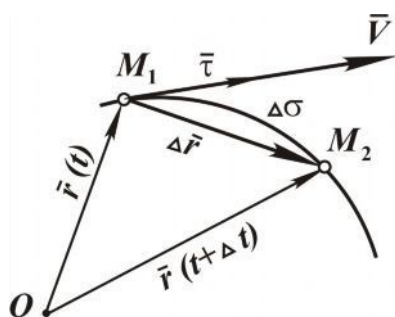


Рис. 2.5

модулю единицы, а предельное положение секущей  $M_1M$  (при  $t \rightarrow 0$ ) совпадает с направлением касательной к кривой в точке  $M_1$ , то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds},$$

где  $\bar{e}_t$  – единичный вектор касательной к кривой, направленный в сторону положительного отсчета дуги (рис. 2.5).

Рассматривая второй предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{t},$$

получаем

$$\bar{V} = \frac{d}{dt}. \quad (2.11)$$

Обозначив

имеем

$$V \frac{d}{dt} \bar{V} = V \bar{V}, \quad (2.12)$$

где  $V_{\tau}$  — проекция скорости на касательную.

### 2.1.2. Ускорение точки

**Определение ускорения точки при векторном способе задания движения.** Полагаем, что в момент времени  $t$  скорость равна  $\vec{V}_1 = \vec{V}(t)$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  — соответственно  $\vec{V}_2 = \vec{V}(t + \Delta t)$  (рис. 2.6).

Изменение вектора скорости за промежуток времени  $\Delta t$  определяется как

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t).$$

Среднее ускорение определяем как отношение  $\Delta \vec{V}$  к  $\Delta t$ , то есть

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Ускорение точки в данный момент времени есть предел отношения приращения скорости  $\Delta \vec{V}$  к приращению времени  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , стремящемся к нулю:

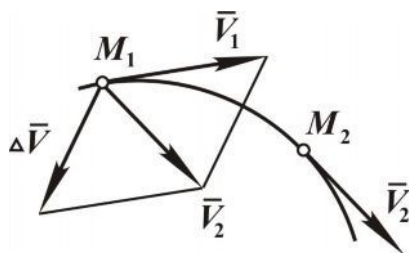


Рис. 2.6

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.13)$$

и так как

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}$$

то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Следовательно, ускорение точки равно первой производной по времени вектора скорости точки или второй производной по времени радиуса-вектора точки.

Единицей измерения ускорения является  $\text{м/с}^2$ .

**Определение ускорения при координатном способе задания движения.** Пусть движение точки задано в прямоугольной системе координат:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Ускорение точки определяется (2.13) как

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}.$$



Вектор ускорения можно представить через его проекции

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Сравнивая два последних выражения, имеем

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}, \quad (2.14)$$

то есть проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна первой производной от соответствующей проекции скорости.

Выражение (2.14), с учетом (2.8), можно представить в виде

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.15)$$

Таким образом, проекция ускорения точки на какую-либо ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты.

Модуль ускорения определяется как

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}^2 + \frac{d^2y}{dt^2}^2 + \frac{d^2z}{dt^2}^2}, \quad (2.16)$$

а направление задается направляющими косинусами:

$$\cos(\alpha, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\alpha, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\alpha, z) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.17)$$

Формулы (2.16), (2.17) полностью определяют вектор ускорения.

**Определение ускорения при естественном способе задания движения.** Прежде чем определить ускорение, введем некоторые понятия из дифференциальной геометрии. В каждой точке кривой можно указать три взаимно перпендикулярных направления – касательная, нормаль и бинормаль. Принимая эти направления за координатные оси, введем единичные векторы этих осей  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ .

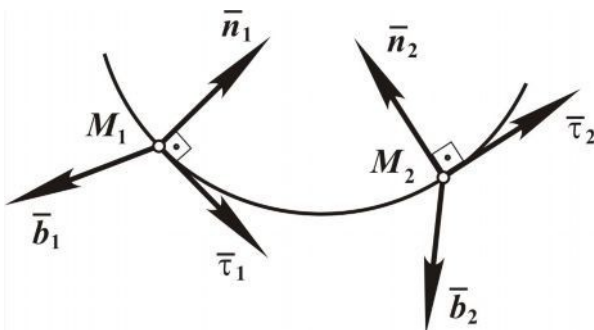


Рис. 2.7

Единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$  уже был введен. Единичный вектор нормали  $\vec{n}$  направляется в сторону вогнутости кривой (рис.2.7). Единичный вектор бинормали  $\vec{b}$  направлен таким образом, чтобы единичные векторы  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  образовывали правую систему координат.

Векторы  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  являются единичными векторами осей естественного трехгранника.

Согласно выражению (2.13) ускорение точки  $\frac{d\bar{V}}{dt}$ , а ее ско-

рость  $\vec{V} = V \vec{\tau}$ , следовательно

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

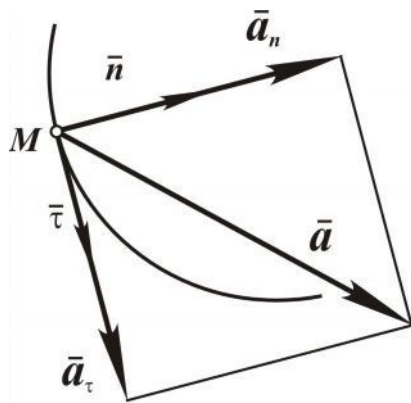
Примем без доказательства, что

$$V \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V^2}{R} \vec{n},$$

где  $R$  — радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Отсюда имеем

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \vec{n}. \quad (2.18)$$



Видно, что ускорение имеет две составляющие:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

и

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

Рис. 2.8

направленные по  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  (рис. 2.8), первая из которых называется *касательным ускорением*, вторая — *нормальным ускорением*.

*Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{R^2}}. \quad (2.19)$$

Составляющие ускорения всегда взаимно перпендикулярны (рис. 2.8).

Касательное ускорение равно нулю при движении точки с постоянной по модулю скоростью. Нормальное ускорение равно нулю при прямолинейном движении точки.

### 2.1.3. Равнопеременное движение точки

Если  $a = \text{const}$ , то движение называется *равнопеременным*, причём если  $a > 0$ , то движение *равноускоренное*, а если  $a < 0$ , то

движение *равнозамедленное*. Определим скорость при равноперемен-

ном движении, используя  $a = \frac{dV}{dt}$ . Разделяем переменные и интегрируем в пределах  $(0, (V_0, V))$ :

$$\int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \int_0^t a dt.$$

Получаем выражение для скорости при равнопеременном движении:

$$V = V_0 + at. \quad (2.20)$$

Зная, что  $V = \frac{d\sigma}{dt}$ , находим уравнение равнопеременного движения, разделяя переменные и используя пределы интегрирования  $0, \sigma$ ,  $0, t$  и выражение (2.20):

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{V_0 + at} = \int_0^t dt. \quad (2.21)$$

**Пример.** Движение точки задано уравнениями

$$x = b \sin \omega t, \quad y = c \cos \omega t, \quad (2.22)$$

где  $b, c$  — постоянные величины. Определить уравнение траектории движения точки, ее скорость и ускорение.

**Решение.** Находим уравнение траектории движения точки в координатной форме. Исключаем время  $t$ , для чего левые и правые части выражения (2.22) возводим в квадрат и складываем, откуда получаем

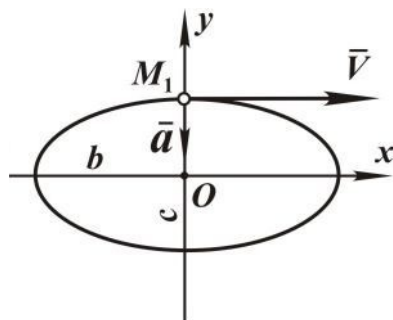


Рис. 2.9

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

Это есть уравнение эллипса с полуосями  $b$  и  $c$  (рис. 2.9).

Определяем проекции скорости на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = b\omega \cos \omega t;$$

$$V_y = \dot{y} = -c\omega \sin \omega t,$$

находим модуль скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{b^2\omega^2 \cos^2 \omega t + c^2\omega^2 \sin^2 \omega t} = \omega \sqrt{b^2 \cos^2 \omega t + c^2 \sin^2 \omega t}$$

и направление

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}$$

V

$$\cos y, V_y$$

V

Рассматриваем момент времени, когда  $x = 0, y = 0$ . Если  $x = 0$ , то  $\sin t = 0$ , а это возможно при  $t = 0$  или  $\omega t = \pi$ . Так как приняли, что

у 0, то этому соответствует  $t = 0$ , точка находится в положении  $M_1$  (см. рис. 2.9). При  $t = 0$  проекции скорости и направляющие косинусы определяются как:  $V_x = b$ ,  $\cos(x, \vec{V}) = 1$ ,  $\cos(y, \vec{V}) = 0$ .

Таким образом, модуль скорости равен  $b$ , при этом вектор скорости направлен параллельно оси  $x$  в сторону её положительного отсчёта (см. рис. 2.9).

Определяем проекции ускорения на координатные оси:

$$\begin{aligned} a_x &= b^2 \sin t; \\ a_y &= -c^2 \cos t, \end{aligned}$$

и так как рассматривается момент времени, при  $t = 0$ , то

$$a_x = 0, a_y = -c^2.$$

Модуль ускорения  $a = c^2$ , а вектор направлен по оси  $y$  в отрицательном направлении (см. рис. 2.19). Ускорение в этот момент имеет только одну составляющую, а именно нормальную, касательная составляющая равна нулю.

## 2.2. Основные движения твёрдого тела

Основными движениями твёрдого тела являются поступательное движение и вращение тела вокруг неподвижной оси. Задачами кинематики твёрдого тела являются установление способа задания его движения, изучение кинематических характеристик, присущих телу в целом, и определение траекторий, скоростей и ускорений всех точек тела.

*Число независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение тела в пространстве, называется числом степеней свободы тела.* Свободное твёрдое тело имеет шесть степеней свободы.

### 2.2.1. Поступательное движение твёрдого тела

*Поступательным движением называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся во всё время движения параллельной своему первоначальному положению.*

Возьмём на теле, движущемся поступательно, две произвольные точки  $A$  и  $B$  и векторным способом зададим их движение (см. рис. 2.10).

Из рисунка видно, что

$$\bar{r}_B \bar{r}_A \cdot \quad (2.23)$$



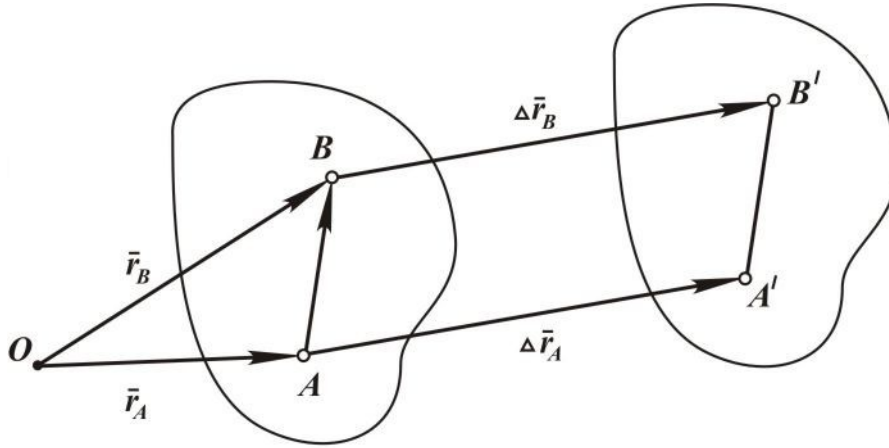


Рис. 2.10

Пусть за промежуток времени  $t$  тело переместится в новое положение, при этом  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$  - векторы перемещений точек  $A$  и  $B$ . Т. к. отрезки  $AB$  и  $A'B'$  равны и параллельны, то фигура  $ABB'A'$  - параллелограмм, следовательно  $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ , то есть при поступательном движении твёрдого тела перемещения всех его точек геометрически равны между собой. Здесь же можно утверждать, что траектории всех точек тела при наложении совпадают.

Определяем скорость точек, для чего дифференцируем выражение (2.23.) по времени

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt},$$

но так как вектор  $\vec{r}$  постоянен по величине и направлению, то

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

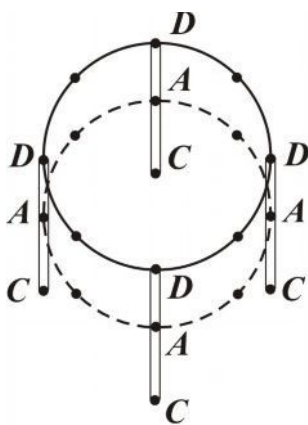


Рис. 2.11

и тогда

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt}, \text{ или } \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (2.24)$$

то есть при поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек в каждый момент времени равны между собой.

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \text{ или } \vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (2.25)$$

то есть ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны между собой.

Таким образом, *при поступательном движении тела все*

его точки движутся одинаково, так как их перемещения, скорости и ускорения геометрически равны.

Поэтому поступательное движение полностью определяется движением одной произвольной точки.

Если взять координатный способ задания движения точек, то уравнениями поступательного движения будут

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t), \quad (2.26)$$

где  $A$  — произвольная точка тела.

На рис. 2.11 показано поступательное движение абсолютно твёрдого тела (стержня  $CD$ ) в плоскости листа. Траекториями точек стержня взяты окружности, хотя могут быть и любые другие кривые.

### 2.2.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением тела вокруг оси будем называть такое движение, при котором некоторая прямая, принадлежащая телу, ось вращения остаётся неподвижной, а все точки тела движутся по окружностям с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения (рис. 2.12).

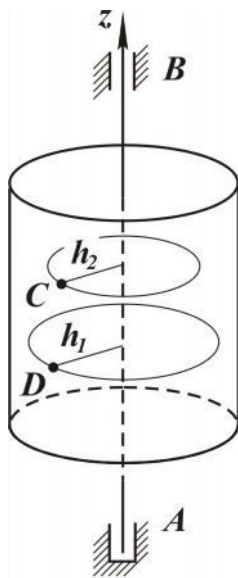


Рис. 2.12

На рисунке  $AB$  — ось вращения,  $h_1, h_2$  — радиусы окружностей, по которым движутся произвольные точки тела  $C$  и  $D$ . Возможность такого движения обеспечивается опорами:  $A$  — подпятник,  $B$  — подшипник, по-другому ещё можно назвать  $A$  — радиально-упорный подшипник,  $B$  — радиальный подшипник. Тело при этом движении имеет одну степень свободы. Следовательно, для задания его движения необходимо иметь один независимый параметр, в качестве которого выбирают угол поворота  $\varphi$ .

Покажем это на рис. 2.13. Пусть  $Ax_1y_1z_1$  — неподвижная система координат, ось  $Az$  направлена по

оси вращения тела. Жестко с телом свяжем систему координат  $Axyz$ . В начальный момент времени эти системы совпадают, а через некоторый промежуток времени они отклоняются и их взаимное положение определяется углом, являющимся функцией времени,

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.27)$$

Для того чтобы угол поворота однозначно определял положение

тела, необходимо условиться относительно положительного направления отсчёта этого угла. Угол  $\varphi$  положительный, если вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $Az_1$ .

Зависимость (2.27) есть уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твёрдого тела являются угловая скорость и угловое ускорение, определим их.

Предположим, что за промежуток времени  $t$  угол поворота получил приращение  $\varphi$ . Тогда средняя угловая скорость определяется равенством

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{t}$$

Угловую скорость в данный момент времени можно определить посредством предельного перехода

$$\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.28)$$

Угловая скорость равна первой производной от угла поворота по времени. Единицей измерения угловой скорости является рад/с. Так как угол поворота  $\varphi$  является алгебраической величиной, то и угловая скорость  $\omega$  также является алгебраической величиной, модуль которой

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

В технике при вращении тела используется число оборотов в минуту. Зависимость между угловой скоростью  $\omega$  и числом оборотов в минуту  $n$  определяется как

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ [рад/с]}.$$

Предполагаем, что за промежуток времени  $t$  угловая скорость получила приращение  $\Delta\omega$ . Тогда среднее угловое ускорение определяется как

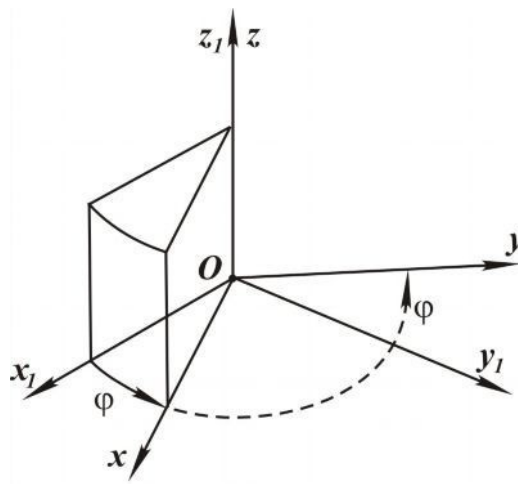


Рис. 2.13

$$\left( \frac{d\varphi_z}{dt} \right)_{t=0} = \frac{d\varphi_z}{dt} \Big|_{t=0}$$

Угловое ускорение в данный момент времени определяется как предел

$$\varepsilon_z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\left(\frac{d\varphi_z}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} \quad (2.29)$$

так как  $\frac{d}{dt}$

Угловое ускорение равно производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота. Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени. Единица измерения углового ускорения рад/с. Здесь определили угловую скорость  $\omega_z$  и угловое ускорение  $\varepsilon_z$  как скалярные величины. В дальнейшем введём их как векторные величины.

### 2.2.3. Равнопеременное вращение твёрдого тела

Если угловая скорость постоянна, то вращение тела равномерное. Здесь рассмотрим случай, когда постоянным является угловое ускорение, то есть  $\varepsilon_z = \text{const}$ . Такое вращение называется *равнопеременным*, причём если  $\varepsilon_z > 0$ , вращение *равноускоренное*, а если  $\varepsilon_z < 0$  – *равнозамедленное*. Исходя из формулы (2.29), определяем  $d\omega_z = \varepsilon_z dt$ .

Интегрируем левую и правую части, взяв начальные условия: время изменяется от нуля до  $t$ , а угловая скорость от  $\omega_0$  до  $\omega$ :

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt.$$

В результате чего имеем

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon_z t \quad (2.30)$$

закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении. Используя формулу (2.28), аналогичным образом находим закон изменения угла во времени:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}, \quad (2.31)$$

где  $\varphi_0$  – начальное значение угла.

### 2.2.4. Векторы угловой скорости и углового ускорения

Для изучения кинематики твёрдого тела полезным является введение векторов угловой скорости и углового ускорения.

Вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$  твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, называется вектор, модуль которого равен абсолютному значению производной угла поворота тела по времени, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.14)

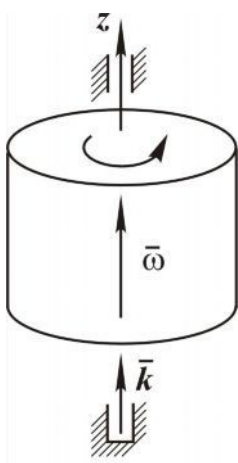


Рис. 2.14

Используя единичный вектор  $\vec{k}$ , запишем вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} \quad (2.32)$$

Вектором углового ускорения является вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости, то есть

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k} \quad (2.33)$$

Отсюда видно, что вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  направлен, как и вектор  $\vec{\omega}$ , вдоль оси вращения (рис. 2.15,а и рис. 2.15,б).

На рис. 2.15,а показано ускоренное вращение, а на рис. 2.15,б замедленное.

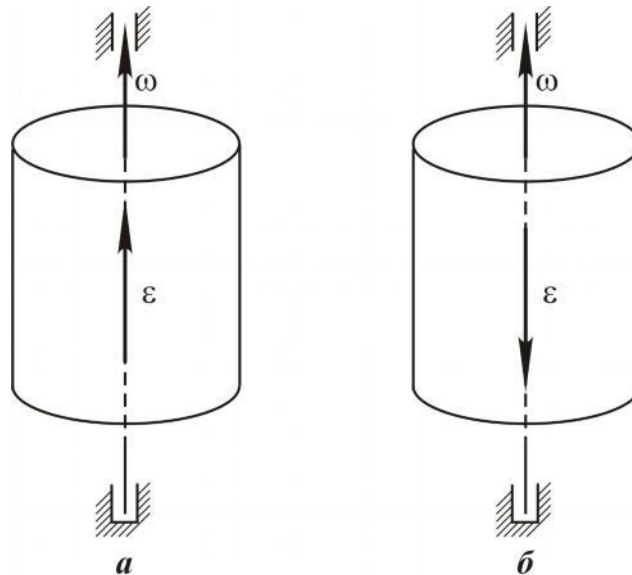


Рис. 2.15

### 2.2.5. Определение скорости и ускорения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассматриваем вращение тела вокруг неподвижной оси  $z_1$  (рис. 2.16).

Берём неподвижную точку тела  $M$ , траекторией движения которой является окружность радиуса  $\rho$  с центром  $O$  на оси вращения  $z_1$ .

Для наглядности показано отдельно сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси  $z_1$  и проходящей через точку  $M$ , где  $\varepsilon$  — угол поворота тела,  $M_0M$  — дуга окружности, по которой рассматриваемая точка переместилась из начального положения  $M_0$  в положение  $M$  (рис. 2.17).

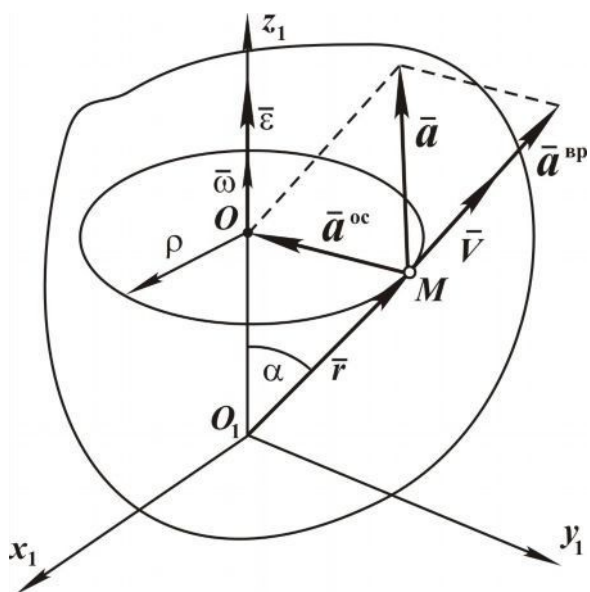


Рис. 2.16

Докажем, что скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси определяется как векторное произведение:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.34)$$

Если векторное произведение  $\vec{r}$  имеет направление такое же, как и вектор скорости точки, а его модуль равен модулю вектора скорости, то выражение (2.34) справедливо. Известно, что векторное произведение — это вектор, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы-сомножители, в нашем случае плоскости, содержащей векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}$ , в ту сторону, откуда вращение по кратчайшему расстоянию первого вектора ко второму видно происходящим против хода часовой стрелки.

Таким образом, рассматриваемый вектор направлен по касательной к траектории движения точки в сторону движения, то есть совпадает по направлению с вектором скорости. Остаётся доказать, что их модули равны.

Модуль

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega \rho. \quad (2.35)$$

Скорость точки (2.34) определяется как производная по времени

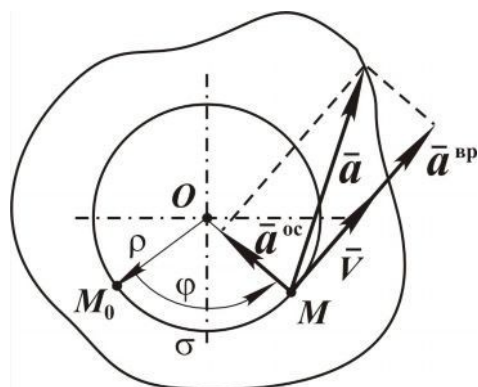


Рис. 2.17



$$V = \frac{d\bar{s}}{dt},$$

где  $\bar{s}$  — дуга.

Как видно из рис. 2.17, дуга окружности

тогда

$$V = \frac{d\bar{s}}{dt} = \omega r,$$

и модуль скорости

$$V = \omega r,$$

что совпадает с модулем векторного произведения (2.35).

Таким образом, соотношение (2.34) доказано.

Для наглядности от пространственного изображения перейдём к плоскому (рис. 2.18), то есть рассмотрим сечение (диск) тела плоскостью, перпендикулярной к оси вращения и содержащей точку  $M$ .

Определим скорости точек  $M, A, B, C$ :

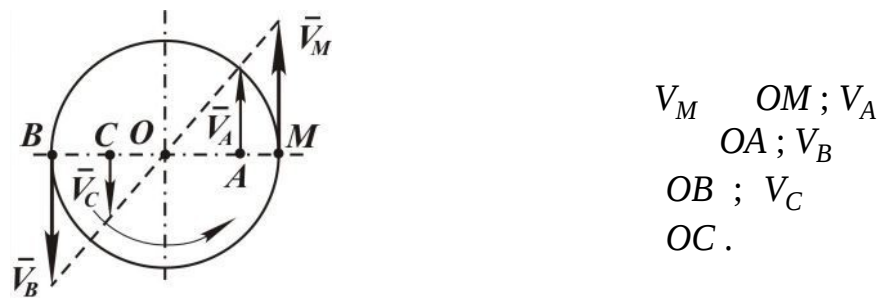


Рис. 2.18

Как видно, модуль скорости любой точки тела равен произведению модуля угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения, то есть пропорционален радиусу окружности, по которой движется точка.

Направлен вектор скорости по касательной к этой окружности в сторону движения, то есть перпендикулярно к радиусу. Для определения ускорения точки  $M$  возьмём производную скорости по времени

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \cdot \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{r} + \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt},$$

здесь  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  — угловое ускорение,  $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} = \bar{\omega} \cdot \bar{r}$  — скорость точки  $M$ .

С учётом этого

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{r} + \bar{\omega} \cdot \bar{V}. \quad (2.36)$$

Из (2.36) видно, что ускорение точки состоит из двух составляющих, первая — вращательное ускорение  $\bar{a}^{sp} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}$ , вторая — осестрем-

тельное ускорение  $\bar{a}^{oc} = \bar{\omega} \times \bar{V}$ . При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси их можно называть касательным и нормальным ускорениями соответственно.

Вращательное ускорение  $\bar{a}_{вр}$  направлено по касательной, и его модуль равен  $a^{вр} = r \sin \alpha = \rho$ . Осестремительное ускорение  $\bar{a}_{ос}$  направлено от точки к оси вращения, то есть по нормали к траектории, модуль определяется как

$$a^{oc} = \omega^2 r \sin 90^\circ = \omega^2 \rho.$$

Таким образом,  $\bar{a} = \bar{a}^{вр} + \bar{a}^{oc}$ , (2.37) а модуль полного ускорения точки  $M$  будет

$$a = \sqrt{(a^{вр})^2 + (a^{oc})^2} = \rho \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad (2.38)$$

так как составляющие ускорения перпендикулярны друг другу.

**Пример.** По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также вращательное, осестремительное и полное ускорения точки  $M$  в указанный момент времени (рис. 2.19).

Дано:  $x = 50t^2$  (см),  $r_2 = 20$  см,  $R_2 = 40$  см,  $r_3 = 15$  см,  $R_3 = 40$  см,  $t = 0,5$  с.

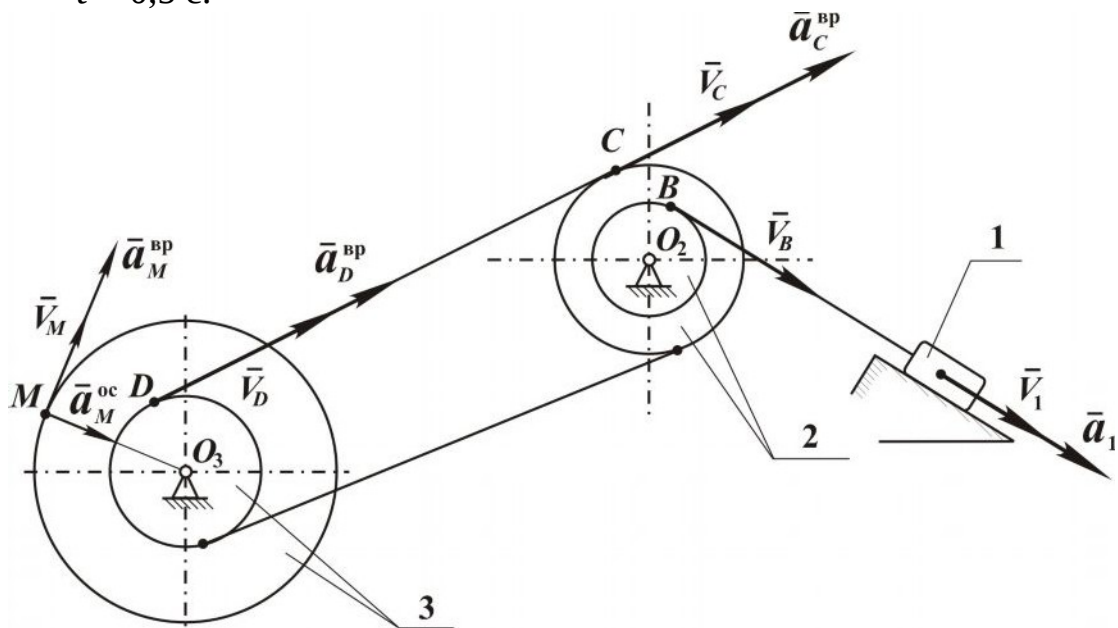


Рис. 2.19

**Решение.** Определяем скорость первого тела:

$$V_1 = \frac{dx}{dt} = 100t;$$

при  $t = 0,5$  с,  $V_1 = 50$  см/с

его ускорение

$$a_1 = \frac{d^2 x}{dt^2} = 100 \text{ см/с}^2$$

и не зависит от  $t$ .

Рассматриваем точку  $B$ , точку соприкосновения нити с колесом. Скорость точки  $B$ ,  $V_B = V_1 = 50 \text{ см/с}$ , вращательное ускорение точки  $B$  равно  $a_B^{\text{вп}} = a_1 = 100 \text{ см/с}^2$ , т. к. нить нерастяжимая. Отсюда находим угловую скорость барабана 2:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2}$$

и его угловое ускорение

$$\varepsilon_2 = \frac{a_B^{\text{вп}}}{r_2}$$

Зная угловую скорость  $\omega_2$  и угловое ускорение  $\varepsilon_2$ , определяем скорость точки  $C$ :

$$V_C = \omega_2 R_2 = \frac{V_1 R}{r_2}$$

и ее вращательное ускорение

$$a_C^{\text{вп}} = \varepsilon_2 R_2 = \frac{a_1 R}{r_2}$$

Так как нить нерастяжимая, то аналогичные значения имеет скорость точки  $D$  и её вращательное ускорение

$$V_D = \frac{V_1 R}{r_2};$$

$$a_D^{\text{вп}} = a_1 \frac{R}{r_2}.$$

Имея эти значения, находим угловую скорость  $\omega_3$  колеса 3 и угловое ускорение  $\varepsilon_3$ :

$$\omega_3 = \frac{V_D}{r_3} = V_1 \frac{R_2}{r_2 r_3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_D^{\text{вп}}}{r_3} = a_1 \frac{R}{r_2 r_3}.$$

Скорость точки  $M$  равна

$$V_M = \omega_3 R_3 = \frac{R_2 R_3}{r_2} V_1$$

$r_2 r_3^1$   
и направлена перпендикулярно к радиусу  $O_3 M$  в сторону вращения

колеса 3.

Вращательное ускорение точки  $M$

$$a_M^{вп} = \varepsilon_3 R_3 \frac{R_2 R_3}{r_2 r_3} a_1$$

и направлено по вектору скорости  $\vec{V}_M$ , так как рассматриваемое вращение колёс – ускоренное.

Осестремительное ускорение точки  $M$

$$a_M^{ос} = \omega_3^2 R_3^2 \frac{R_2^2}{r_2^2 r_3^2} V_1^2$$

и направленно по радиусу  $O_3M$  к центру колеса  $O_3$ .

Полное ускорение

$$a_M = \sqrt{(a_M^{ос})^2 + (a_M^{вп})^2}$$

Для указанного момента времени:

$$V_M = \frac{40}{40} \cdot 50 = 267 \text{ см/с};$$

$$a_M^{вп} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 15}{100} = 533 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M^{ос} = 40 \cdot \frac{20^2 \cdot 15^2}{40^2} = 17689 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{(533)^2 + (17697)^2} = 17697 \text{ см/с}^2.$$

## 2.3. Плоское движение твёрдого тела

### 2.3.1. Задание движения

Движение твёрдого тела называется плоским, или плоскопараллельным, если все точки тела перемещаются в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

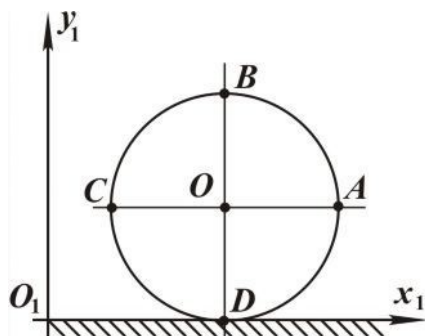


Рис. 2.20

Наглядным примером плоского движения твёрдого тела является качение круглого диска по неподвижной поверхности в вертикальной плоскости (рис. 2.20). Траектории всех точек диска  $A, B, C, D, O$  располагаются в одной плоскости  $O_1x_1y_1$ .

Представим, что вместо диска по плоскости  $x_1O_1z$  катится цилиндр (см. рис. 2.21)

параллельны вертикальной  
плоскости

так, что его основания во всё время движения  
 $x_1 O_1 y_1$ . Траектории движения всех то-

чек цилиндра будут находиться в плоскостях, параллельных плоскости  $x_1O_1y_1$ . Это позволяет сделать вывод, что вместо рассмотрения плоского движения всего тела, в приведённом примере цилиндра, можно перейти к рассмотрению плоской фигуры – круглого диска.

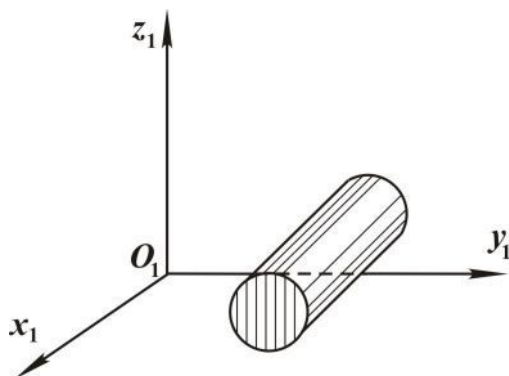


Рис. 2.21

Тело при таком движении имеет три степени свободы, следовательно, для задания его движения необходимо иметь три независимых параметра. Такими параметрами могут быть координаты полюса (точки  $A$ ) и угол поворота фигуры вокруг полюса (рис. 2.22):

$$\begin{aligned} x_{1A} & x_{1A}(t); \\ y_{1A} & y_{1A}(t); \\ & t \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь системы координат:  $O_1x_1y_1$  – неподвижная и  $Ax_2y_2$  – движущаяся

жущаяся поступательно,  $Ax_2y_2$  – жестко связанная с телом, соответственно.

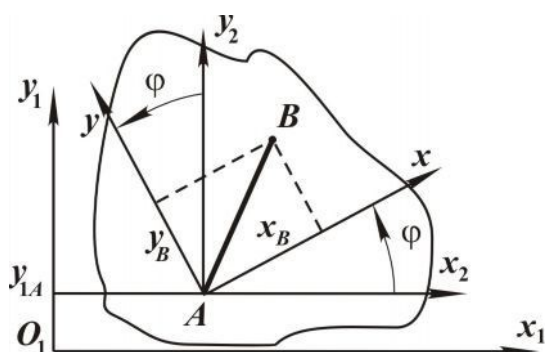


Рис. 2.22

Зависимости (2.39) являются уравнениями плоского движения тела, которые позволяют плоское движение рассматривать как совокупность двух движений, а именно поступательного движения вместе с полюсом  $A$  и вращательного движения вокруг полюса  $A$ .

Покажем это на рис. 2.23. Пусть в начальный момент времени тело занимает положение I, а затем через некоторое время перемещается в положение II. Берём две точки ( $A$  и  $B$ ) и соединяем их прямой. От положения прямой  $AB$  в начальный момент времени к положению  $A''B''$  в рассматриваемый момент времени можно перейти следующим образом: вначале тело и, соответственно, прямую  $AB$  нужно переместить поступательно, совместив точки  $A$  и  $A''$ , а затем повернуть тело на угол

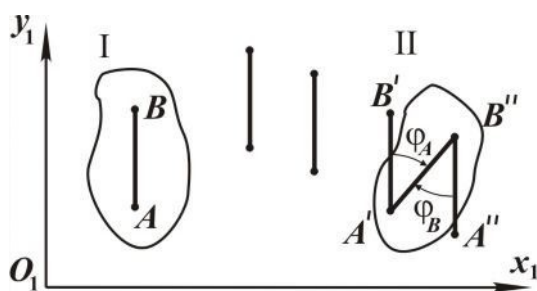


Рис. 2.23

50



А ВОКРУГ

точки  $A''$  до совпадения точек  $B$  и  $B''$ .

Таким образом, *плоское движение тела мы представим как совокупность поступательного движения и вращательного движения*, причём вращательное движение не зависит от выбора полюса. Можно было бы при поступательном движении совместить точки  $B$  и  $B''$  и повернуть вокруг  $B''$  на  $B$ , который, как видно, равен углу  $A$ .  
 точки  $B''$  на  $B$ , который, как видно, равен углу  $A$ .  
 точки  $B''$  на  $B$ , который, как видно, равен углу  $A$ .  
 точки  $B''$  на  $B$ , который, как видно, равен углу  $A$ .

### 2.3.2. Скорости точек тела при плоском движении

В том случае, когда заданы уравнения плоского движения (2.39), скорость произвольной точки  $B$  можно определить, используя координатный способ задания движения, а именно вначале найти координаты точки  $B$  (см. рис. 2.23):

$$\begin{aligned} x_{1B}(t) &= x_{1A}(t) + x_B \cos(t) - y_B \sin(t); \\ y_{1B}(t) &= y_{1A}(t) + x_B \sin(t) + y_B \cos(t), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $x_B, y_B$  - координаты точки  $B$  в системе координат, жёстко связанной с телом, они известны и являются постоянными величинами.

Продифференцировав по времени  $x_{1B}, y_{1B}$ , находим проекции скорости точки на координатные оси:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1B} &= \dot{x}_{1A} - (x_B \sin t + y_B \cos t) \dot{\varphi}; \\ \dot{y}_{1B} &= \dot{y}_{1A} + (x_B \cos t - y_B \sin t) \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Первые слагаемые в выражениях (2.41) -  $\dot{x}_{1A}, \dot{y}_{1A}$  - есть проекции скорости точки  $A$  на неподвижные координатные оси. Последние слагаемые являются проекциями скорости точки  $B$  при вращении фигуры вокруг полюса  $A$  с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ , т. к. при вращении фигуры вокруг полюса  $A$  скорость точки  $B$  по модулю равна  $V_{BA} = |\dot{\varphi}| \cdot AB$  и направлена перпендикулярно к  $AB$  в сторону вращения (рис. 2.24).

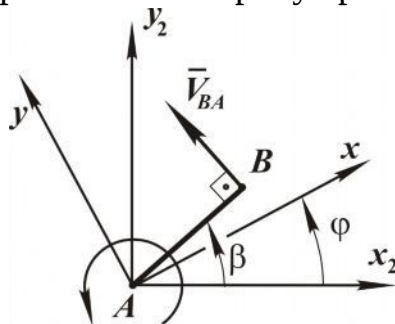


Рис. 2.24

Проекции этой скорости на оси  $x_2$ ,  $y_2$  и аналогично на  $x_1, y_1$  определяются следующим образом:

$$V_{BA_{x2}} = V_{BA} \sin \alpha \quad \& \quad AB \sin \alpha ;$$

$$V_{BA_{y2}} = V_{BA} \cos \alpha \quad \& \quad AB \cos \alpha ,$$

при этом

$$AB \sin \alpha = x_B \sin \alpha + y_B \cos \alpha ;$$

$$AB \cos \alpha = x_B \cos \alpha - y_B \sin \alpha .$$

Это доказывает утверждение о том, что вторые слагаемые в выражении (3.3) есть проекции скорости  $\vec{V}_{BA}$  на оси  $x_1, y_1$ .

Следовательно, вектор скорости любой точки  $B$  плоской фигуры равен геометрической сумме скорости полюса  $A$  и скорости точки  $B$  при вращении плоской фигуры вокруг полюса  $A$ .

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega \times \vec{AB} . \quad (2.42)$$

Второе слагаемое  $\omega \times \vec{AB}$  обозначает  $\vec{V}_{BA}$ , тогда

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} . \quad (2.43)$$

Вектор скорости  $\vec{V}_{BA}$  перпендикулярен к  $\vec{AB}$  и направлен в сторону вращения, а по модулю равен  $V_{BA} = \omega \cdot AB$ , то есть пропорционален расстоянию от точки  $B$  до полюса  $A$ .

Изобразим на рис. 2.25 указанные векторы скоростей при разных направлениях вращения фигуры.

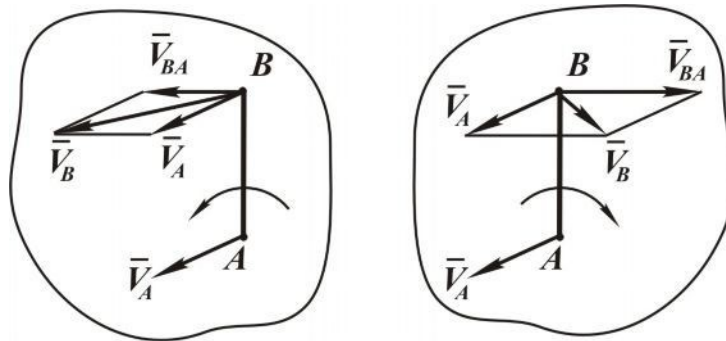


Рис. 2.25

### 2.3.3. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

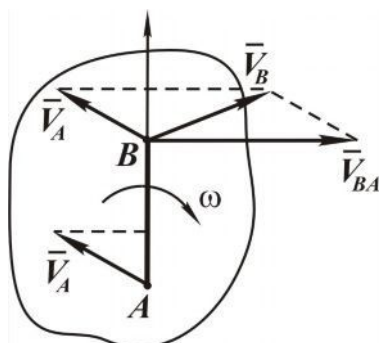


Рис. 2.26

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Докажем это. Скорость точки

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} .$$

Выбираем положительное направление

для оси  $AB$ , как показано на рис. 2.26. Проецируем это векторное равенство на ось  $AB$ :

$$(\vec{V}_B)_{AB} - (\vec{V}_A)_{AB} - (\vec{V}_{BA})_{AB} = 0.$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, так как вектор  $\vec{V}_{BA}$  направлен по направлению  $\vec{AB}$ , следовательно,  $(\vec{V}_B)_{AB} - (\vec{V}_A)_{AB} = 0$ , что и требовалось доказать.

### 2.3.4. Мгновенный центр скоростей

*Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*

Докажем, что если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю, то мгновенный центр скоростей существует. В случае равенства нулю угловой скорости тело совершает мгновенно-поступательное движение, при котором скорости всех точек равны между собой.

Берём произвольную точку  $A$ , скорость которой  $\vec{V}_A$  не равна нулю, иначе эта точка была бы мгновенным центром скоростей (М. Ц. С.).

Под углом  $\frac{\pi}{2}$  по направлению вращения фигуры откладываем отрезок  $AP$ , равный

$$AP = \frac{V_A}{\omega}$$

и доказываем, что точка  $P$  есть М.Ц.С., то  $V_P = 0$  согласно формуле (2.43),

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}. \quad (2.44)$$

Изображаем на рис. 2.27 векторы  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , вектор  $\vec{V}_{PA}$  направлен перпендикулярно к  $AP$  в сторону вращения.

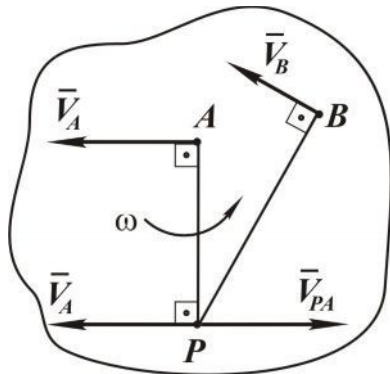


Рис. 2.27

Модуль скорости  $V_{PA} = \omega \cdot AP$ ,

и так как

$$AP = \frac{V_A}{\omega}, \text{ то}$$

$$V_{PA} = \omega \cdot \frac{V_A}{\omega} = V_A$$

Векторы  $\vec{V}_A, \vec{V}_{PA}$  направлены в противоположные стороны, а их модули равны,

следовательно, сумма равна нулю, то есть

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0,$$

точка  $P$  есть мгновенный центр скоростей. Берём за полюс точку  $P$  и

находим скорость произвольной точки  $B$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \omega \times \overline{PB},$$

ввиду того что  $\vec{V}_P = 0$ ,

$$\vec{V}_B = \omega \times \overline{PB}.$$

Из этой формулы следует, что скорости точек тела при плоском движении распределяются так же, как и при вращательном движении.

Здесь осью вращения является мгновенная ось, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости фигуры.

Таким образом:

1) векторы скоростей перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с М.Ц.С. ( $\vec{V}_B \perp BP$ ), и направлены в сторону вращения;

2) модули скоростей пропорциональны расстояниям от точек до мгновенного центра скоростей:

$$V_B = \omega \cdot BP.$$

Зная положение М.Ц.С., можно найти скорости всех точек плоской фигуры, если известна скорость какой-либо её точки. Пусть, например, известна скорость  $\vec{V}_A$  точки  $A$ , а точка  $P$  — М.Ц.С. По направлению вектора скорости  $\vec{V}_A$  определяем направление вращения фигуры (рис. 2.28). Затем определяем угловую скорость

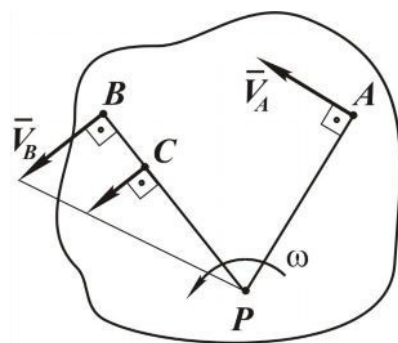


Рис. 2.28

$$\omega = \frac{V_A}{AP}$$
 Берём любую точку  $B$  и находим её скорость. Для определения направления вектора скорости  $\vec{V}_B$  соединяем точку  $B$  с М.Ц.С. (точкой  $P$ ) и восстанавливаем перпендикуляр к  $BP$  в сторону вращения. Модуль вектора скорости  $\vec{V}_B$  равен

$$V_B = \omega \cdot BP$$

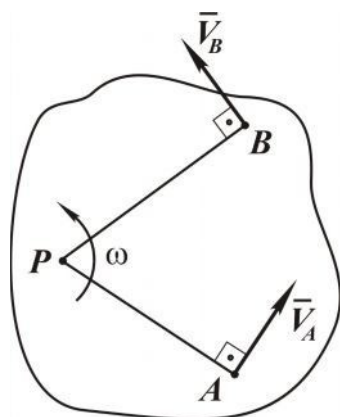


Рис. 2.29

или, используя

$$\omega = \frac{V_A}{AP} \text{ имеем } V_B = \frac{BP}{AP} V_A.$$

Аналогичным образом можно найти скорость любой точки фигуры. Соединив конец вектора  $\vec{V}_B$  с точкой  $P$ , получаем эпилору распределения скоростей точек, расположенных на отрезке  $BP$ . Используя свойства (1) и (2) мгновенного центра скоростей, можно определить его положение и в других случаях.

**Первый случай**, когда известны направления векторов скоростей двух точек —  $A$  и  $B$



(см. рис. 2.29). Для нахождения М.Ц.С. используем первое свойство, а именно восстанавливаем перпендикуляры в точках  $A$  и  $B$  к векторам  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  до их пересечения. Точка пересечения  $P$  и есть М.Ц.С.

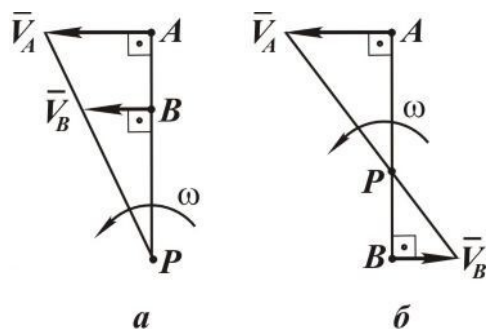


Рис. 2.30

**Второй случай:** скорости  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  точек  $A$  и  $B$  параллельны и перпендикулярны к отрезку  $AB$ . Для определения положения М.Ц.С. воспользуемся вторым свойством, для чего проведём прямую через концы векторов  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  до пересечения с прямой  $AB$ . Точка пересечения и есть М.Ц.С. (рис. 2.30).

**Третий случай:** скорости  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{V}_B$  параллельны, но не перпендикулярны отрезку  $AB$ . В этом случае прямые, перпендикулярные к  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , пересекаются в бесконечности, и поэтому мгновенный центр скоростей не существует (рис. 2.31). В данный момент времени угловая скорость фигуры равна нулю ( $\omega = 0$ ), а скорости всех точек одинаковы.

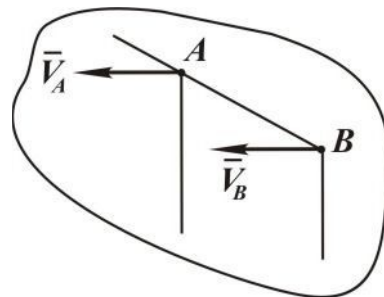


Рис. 2.31

При качении без скольжения тела по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения (рис. 2.32), так как её скорость равна нулю.

**Пример.** Кривошип  $OA = 20$  см вращается вокруг оси  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = 2$  рад/с. Шатун  $AB = 80$  см связывает центр колеса  $B$  с кривошипом. Колесо радиуса  $R = 10$  см катится без проскальзывания по неподвижной поверхности. Определить скорости точек  $A, B, C, D$  и угловые скорости шатуна и колеса при двух положениях кривошипа – вертикальном и горизонтальном.

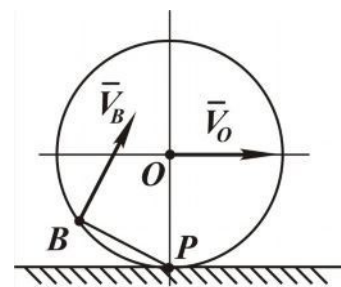


Рис. 2.32

Рассматриваем первый случай, когда кривошип вертикален (см. рис. 2.33).

Кривошип совершает вращательное движение, следовательно, вектор скорости  $\vec{V}_A$  направлен перпендикулярно к  $OA$  в сторону вращения, а по модулю равен

$$V_A = \omega_0 \cdot OA, \quad V_A = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с.}$$

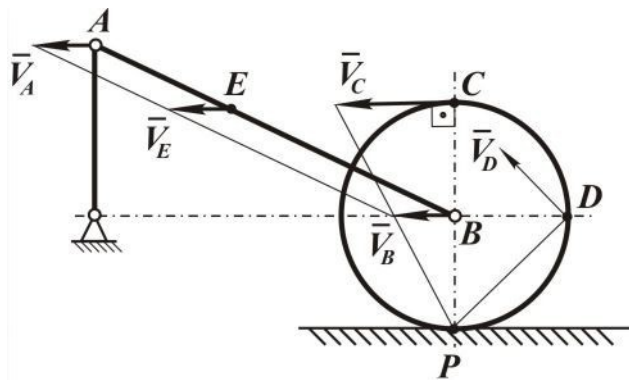


Рис. 2.33

Определяем положение М.Ц.С. шатуна  $AB$ . Точка  $B$  движется всё время по прямой, параллельной неподвижной поверхности, следовательно, и вектор скорости  $\vec{V}_B$  будет параллелен ей.

Перпендикуляры, восстановленные в точках  $A$  и  $B$  к векторам скоростей  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , пересекаются в бесконечности. Поэтому М.Ц.С. для данного положения шатуна не существует, то есть угловая скорость шатуна равна нулю, а скорости точек  $A$  и  $B$  равны между собой (рис. 2.33).

Мгновенный центр колеса находится в точке  $P$  касания колеса с неподвижной плоскостью. Зная направление  $\vec{V}_B$ , определяем направление мгновенного вращения колеса вокруг точки  $P$ . Используя М.Ц.С., находим угловую скорость колеса:

$$\omega_K = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_B}{r} = \frac{40}{10} = 4 \text{ рад/с}$$

и далее модули скоростей точек  $D$  и  $C$ :

$$V_D = \omega_K \cdot PD = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см/с}, \quad V_C = \omega_K \cdot PC = 4 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}.$$

Для определения направления векторов  $\vec{V}_D$  и  $\vec{V}_C$  соединяем точки  $C$  и  $D$  с М.Ц.С. (точкой  $P$ ) и восстанавливаем к ним перпендикуляры в сторону мгновенного поворота (рис. 2.33).

Рассматриваем второй случай, когда положение кривошипа  $OA$  горизонтально (см. рис. 2.34).

Модуль вектора скорости  $V_A$  нам уже известен. Показываем его направление. Определяем М.Ц.С. шатуна  $AB$ . Восстанавливаем в точках  $A$  и  $B$  перпендикуляры к скоростям  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ .

Так как вектор скорости  $\vec{V}_B$  может быть направлен только парал-

лельно неподвижной плоскости, то указанные перпендикуляры пересекаются в точке  $B$ , то есть точка  $B$  является М.Ц.С. для шатуна  $AB$ , её скорость  $\vec{V}_B$  равна нулю. Определяем угловую скорость шатуна:

$$\overline{V}_A = \overline{\omega}_{AB} \cdot AB = \frac{40}{80} \cdot 0,5 \text{ рад/с.}$$

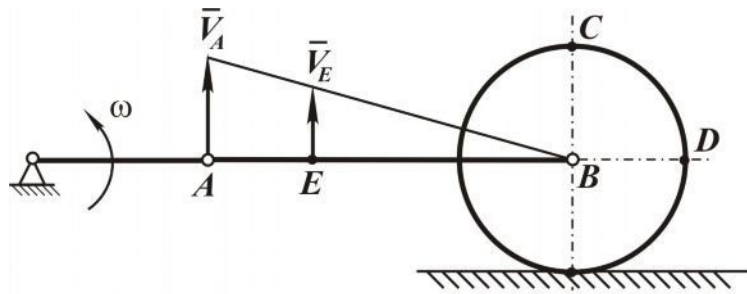


Рис. 2.34

Скорости точек  $C$  и  $D$  равны нулю, так как в этом положении угловая скорость колеса равна нулю.

## 2.4. Сложное движение точки

### 2.4.1. Основные понятия и определения

Во многих задачах механики удобно считать, что движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат состоит из нескольких более простых движений.

Для этого вводят в рассмотрение подвижную систему отсчета, движущуюся определенным образом относительно основной системы отсчета.

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется сложным или, *абсолютным*, а  $\overline{V}_a$  – абсолютная скорость,  $\overline{a}_a$  – абсолютное ускорение.

Движение точки относительно подвижной АО называется *относительным*;  $\overline{V}_r$  – относительная скорость,  $\overline{a}_r$  – относительное ускорение.

$\overline{V}_r$

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется *переносным*;  $\overline{V}_e$ ,  $\overline{a}_e$  – переносные скорость и ускорение.

$\overline{a}_e$

Основной задачей при изучении сложного движения точки является установление зависимостей между скоростями и ускорениями абсолютного, относительного и переносного движения.

### 2.4.2. Теорема о сложении скоростей

Пусть движение точки  $M$  относительно подвижной системы координат  $Oxuz$  задано уравнениями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

В каждый момент времени для радиус-вектора точки  $M$  относи-

относительно неподвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  справедлива зависимость (рис. 2.35)

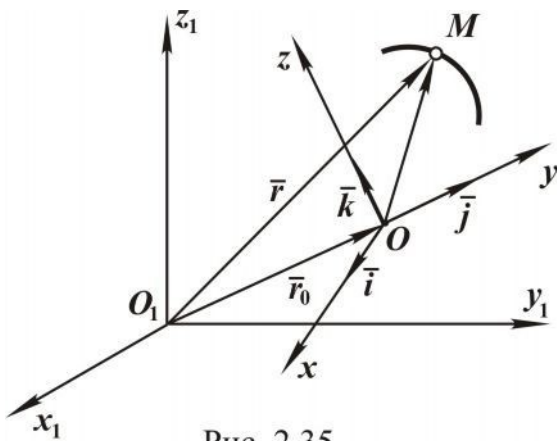


Рис. 2.35

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где  $r_0$  – радиус вектора начала  $O$  подвижной системы координат относительно начала  $O_1$  неподвижной системы координат;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы осей подвижной системы координат, которые вследствие движения подвижной системы координат меняют свое направление, то есть являются функциями времени.

Следовательно, производные единичных векторов по времени будут равны

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

По определению абсолютная производная радиуса-вектора  $\vec{r}$  по времени  $\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – абсолютная скорость точки  $M$ :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

положим что

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \text{ тогда}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}), \text{ следовательно, } \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

**Абсолютная скорость** точки при сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

### 2.4.3. Теорема сложения ускорений

Для того чтобы найти абсолютное ускорение точки, нужно найти

абсолютную производную вектора скорости  $\vec{v}$  по времени  $V_a$

$$\nabla_a \vec{v} = \frac{dr_0}{dt} \vec{i} + \frac{dx_1}{dt} \vec{j} + \frac{dy_1}{dt} \vec{k} = \omega_0 \vec{i} + \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}$$

и продифференцировать его по времени

$$\bar{a}_a = \frac{dV_a}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \frac{d^2 r_0}{dt^2} \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k} \frac{dx}{dt} \frac{d\bar{i}}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{d\bar{j}}{dt} \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{k}}{dt} - \frac{d\omega_e}{dt} (x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}) \omega_e \frac{dx}{dt} \bar{i} \frac{dy}{dt} \bar{j} \frac{dz}{dt} \bar{k} \omega_e \frac{d\bar{i}}{dt} x \frac{d\bar{j}}{dt} y \frac{d\bar{k}}{dt} z$$

где  $\bar{a}_r = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}$  – относительное ускорение точки  $M$ ;

$\bar{a}_e = \frac{d^2 r_0}{dt^2} \frac{d\omega_e}{dt} (x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}) \omega_e x \frac{d\bar{i}}{dt} y \frac{d\bar{j}}{dt} z \frac{d\bar{k}}{dt}$  – переносное у-

скорение точки  $M$ , представляющее собой ускорение твердого тела, с которым жестко связана подвижная система координат;  $a_0 = \frac{d^2 r_0}{dt^2}$  – ускорение начала (точки  $O$ )

подвижной системы координат;

$$\omega_e = \omega_e \rho \omega_e x \frac{d\bar{i}}{dt} y \frac{d\bar{j}}{dt} z \frac{d\bar{k}}{dt} ;$$

$\varepsilon_e \rho = \frac{d\omega_e}{dt} x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}$ ;  $\omega_e$ ,  $\varepsilon_e$  – угловая скорость и угловое ускорение

подвижной системы координат  $\bar{a}_c = 2\omega_e V_r$  – поворотное соответственно; ускорение, или ускорение

Кориолиса;

$$\frac{dx}{dt} \frac{d\bar{i}}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{d\bar{j}}{dt} \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_e \frac{d\bar{i}}{dt} x \frac{d\bar{j}}{dt} y \frac{d\bar{k}}{dt} z \omega_e V_r ;$$

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin \bar{\omega}_e, \bar{V}_r$$

Таким образом,

$$a_a = \frac{d^2 r}{dt^2} \omega_e \omega_e \rho \varepsilon_e \rho a_r + 2\omega_e V_r, \quad a_a = a_e + a_r + a_c.$$

или

Абсолютное ускорение точки при ее сложном движении равно геометрической сумме переносного ускорения, относительного ускорения и ускорения Кориолиса.

Рассмотрим подробнее ускорение Кориолиса. Направление этого ускорения определяется направлением векторного произведения векторов  $\omega_e$  и  $V_r$ , то есть кориолисово ускорение направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\omega_e$  и  $V_r$ , в ту сторону, откуда кратчайший



переход от  $\bar{\omega}_e$  к  $\bar{\omega}_e'$  виден происходящим против хода часовой стрелки.

Для определения направления кориолисова ускорения применяется также правило Жуковского: *проекцию относительной скорости  $V_r$  на плоскость, перпендикулярную угловой скорости  $\bar{\omega}_e$  подвижной системы координат, повернуть на  $90^\circ$  в направлении переносного вращения.*

- Ускорение Кориолиса будет равно нулю в следующих случаях:
- 1)  $\bar{\omega}_e = 0$ , т. е. при поступательном движении подвижной системы координат;
  - 2) в момент времени, когда относительная скорость  $\bar{V}_r$  точки равна нулю;
  - 3) угловая скорость  $\bar{\omega}_e$  подвижной системы координат параллельна относительной скорости  $\bar{V}_r$  точки.

**Пример.** Треугольник  $OAB$  (рис. 2.36), вращается относительно горизонтальной оси по закону  $\varphi_e = 2t^2$ . По гипотенузе  $OB$  движется точка  $M$ , закону

дуговая координата которой  $S_r = OM = 6 \sin \frac{t}{6}$  см. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.

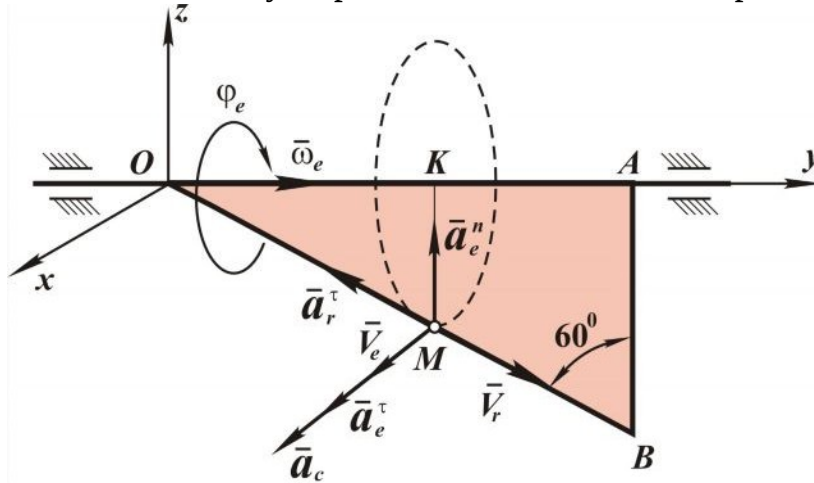


Рис. 2.36

Подвижная система координат в этой задаче жестко связана с треугольником  $OAB$ . Определим положение точки  $M$  в относительном движении:

$$S_r = OM = 6 \sin \frac{t}{6} = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ см.}$$

Переносная скорость, то есть скорость той точки гипотенузы, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка  $M$ , направлена в сторону вращения перпендикулярно радиусу окружности, которую описывает точка в переносном движении (рис. 2.36):

$$V_e = \omega_e r,$$

где  $r = MK = OM \cos 60^\circ$ ,  $t = 1$  секунда  $r = MK = 3 \cdot 0,5 = 1,5$  см;

$$\frac{d\omega_e}{dt} = 4t, \text{ при } t = 1 \text{ секунда } \omega_e = 4 \text{ с}^{-1} \text{ или } V_{e1} = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ см/с.}$$

Относительное движение точки задано естественным способом. Определим величину относительной скорости точки  $M$ :

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 6 \frac{\cos \frac{t}{6}}{6} = \cos \frac{t}{6}, \text{ при } t = 1 \text{ секунда } V_r = 1,57 \text{ см/с.}$$

Вектор абсолютной скорости точки  $M$  определяется по формуле

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Учитывая, что переносная и относительная скорости точки  $M$  перпендикулярны, величина абсолютной скорости равна

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}, \text{ при } t = 1 \text{ секунда } V = \sqrt{1,57^2 + 6,2^2} \text{ см/с.}$$

Определим абсолютное ускорение точки  $M$ :

$$a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c.$$

Так как точка  $M$  при переносном движении перемещается по криволинейной траектории, ее *переносное ускорение* представляет собой сумму вращательного и осестремительного ускорений

$$-\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^t,$$

где  $a_e^t = e \cdot r \frac{d^2}{dt^2} r$ , при  $t = 1$  секунда  $a_e^t = 4 \cdot 3 \cdot 12 \text{ см/с}^2$ ,

$$a_e^n = e^2 \cdot r = 4t^2 \cdot r, \text{ при } t = 1 \text{ секунда } a_e^n = 4^2 \cdot 3 = 48 \text{ см/с}^2,$$

Относительное ускорение точки  $M$

$$a_r = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt} = -\frac{1}{6} \sin \frac{1}{6} t,$$

при  $t = 1$  секунда  $a_r = \frac{3,14^2}{6} = 0,5 \cdot 0,822 \text{ см/с}^2$ .

Знак « $-$ » показывает, что точка  $M$  движется по прямой  $OB$  замедленно, а относительное ускорение  $\bar{a}_r$  направлено противоположно вектору  $V_r$ .

Определим ускорение Кориолиса:

$$a_c = 2 \cdot \vec{V}_e \sin \frac{1}{6} \cdot \vec{V}_r.$$

Угол между векторами  $\vec{V}_e$  и  $V_r$  (рис.2.36) равен  $30^\circ$ , следовательно,

$$a_c = 2 \cdot V_e \sin 30^\circ = 2 \cdot 4t \cdot \frac{1}{2} = 4t \cdot \cos \frac{1}{6} t$$

при  $t = 1$  секунда  $a_c = 2 \cdot 4 \cdot 1,57 \cdot 0,5 = 6,28 \text{ см/с}^2$ .

Чтобы найти величину абсолютного ускорения, нужно спроецировать найденные векторные составляющие на оси координат:

$$a_x = a_e + a_c = 12 + 6,28 = 18,28 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r \cos 30^\circ$$

0,822 0,865 0,71 cm/c<sup>2</sup>,

$$a \sqrt{\frac{a^z}{2} \frac{a^n}{xyz} \frac{a \sin 30^\circ}{\alpha^2} \frac{48}{\alpha}} \sqrt{8,28^2 + 0,71^2 + 48,41^2} = 51,75 \text{ cm/c}^2.$$

## 3. ДИНАМИКА

### 3.1. Предмет и задачи динамики. Законы динамики

Предметом динамики является изучение движения материальных точек, тел и их систем с учётом действующих сил.

Все задачи динамики делятся на две.

*Первая задача* – закон движения точки задан, требуется найти силы, действующие на эту точку. *Вторая задача* обратная, силы являются заданными, а требуется найти закон движения.

Динамика построена на законах Ньютона.

*Первый закон* изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Фундаментальное значение для всей динамики имеет *второй закон* Ньютона: сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое пропорционально величине силы и имеет направление силы. В аналитической форме этот закон представляется в виде

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{F}$  – сила, действующая на материальную точку,  $\bar{a}$  – её ускорение,  $m$  – масса точки, являющаяся мерой её инертных свойств.

*Третий закон* Ньютона: две материальные точки взаимодействуют друг с другом так, что силы их взаимодействия равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.

Единица силы называется Ньютоном, из выражения (3.1) следует, что  $1\text{Н} = 1\text{кг м/с}^2$ .

### 3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Выражение (3.1) является основным уравнением динамики точки. Положение материальной точки определим радиус-вектором  $\bar{r}$ . Сила, действующая на точку, может быть функцией радиус-вектора  $\bar{r}$ , скорости  $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  (например, сила сопротивления) и времени  $t$ .

Следовательно, в общем случае основное уравнение динамики точки (3.1) можно записать в форме

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = F(\bar{r}, \bar{V}, t). \quad (3.2)$$

Это есть *дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме*. Спроецируем обе части уравнения (3.2) на неподвижные оси декартовых координат, получаем три уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (3.3)$$

где  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  — проекции ускорения точки на оси координат,  $F_x, F_y, F_z$  — проекции силы на те же оси.

При проецировании уравнения (3.2) на оси естественного трехгранника получается

$$ma = F, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b, \quad (3.4)$$

где  $F, F_n, F_b$  — проекции силы на касательную, нормаль и бинормаль.

Из кинематики известно, что

$$a = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

С учетом этого уравнения (3.4) принимают вид

$$m \frac{d^2V}{dt^2} = F, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (3.5)$$

### 3.3. Материальная система

*Материальной системой называется совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.*

Массой  $M$  материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему,  $M = \sum_{k=1}^n m_k$ , где  $m_k$  — масса материальной точки с номером  $k$ , а  $n$  — число всех точек системы.

*Центром масс, или центром инерции материальной системы, называется геометрическая точка, радиус-вектор  $\vec{r}_C$  которой определяется равенством*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (3.6)$$

или точка с координатами

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (3.7)$$





тяжести, совпадает с его центром тяжести. Умножим числитель и знаменатель правой части формулы (3.6) на модуль ускорения силы тяжести  $g$ , в результате будем иметь

$$r_C = \frac{Mg}{m_k g} \bar{r}_k.$$

Так как  $Mg = P$ , весу тела, а  $m_k g = P_k$ , весу материальной точки, то

$$r_C = \frac{P}{P_k} \bar{r}_k,$$

что совпадает с выражением для радиус-вектора центра тяжести твердого тела.

### 3.4. Моменты инерции тел простейшей геометрической формы

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы  $m$  этой точки на квадрат ее расстояния  $h$  до оси:

$$J_z = mh^2. \quad (3.8)$$

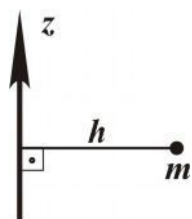


Рис. 3.1

Моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно той же оси:

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \quad (3.9)$$

При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл.

Момент инерции относительно оси представляет определенно положительную величину. Размерность момента инерции в системе СИ равна  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Момент инерции однородного тонкого стержня массы  $M$  и длины  $l$  относительно оси  $z$ , проходящей перпендикулярно стержню через его конец (рис. 3.2,а), равен

$$J_{Oz} = \frac{1}{3} Ml^2 \quad (3.10)$$

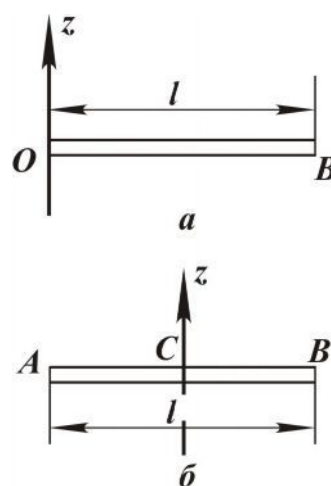


Рис. 3.2

и относительно оси, проходящей через его центр тяжести (рис. 3.2,б), равен

$$J_{Cz} = \frac{1}{12} M l^2. \quad (3.11)$$

**Момент инерции материального круга** с массой  $M$  и радиусом  $R$  относительно оси  $z$ , перпендикулярной плоскости круга и проходящей через его центр тяжести (рис. 3.3), равен

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M R^2. \quad (3.12)$$

**Момент инерции однородного круглого цилиндра** (рис. 3.4) относительно продольной оси  $z$  равен

$$J_z = \frac{1}{2} M R^2, \quad (3.13)$$

где  $M$  — масса цилиндра,  $R$  — радиус.

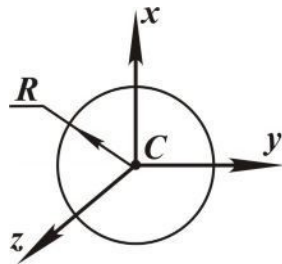


Рис. 3.3

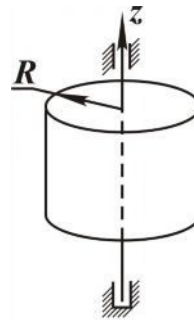


Рис. 3.4

**Моменты инерции относительно параллельных осей.** Существует простая связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, а именно *момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

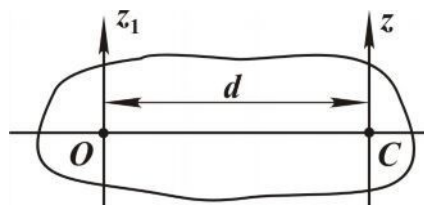


Рис. 3.5

Пусть  $Oz_1$  — ось, относительно которой определяется момент инерции тела (рис. 3.5), а  $Cz$  — ось, проходящая через центр масс тела, параллельно первой. Тогда

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + Md^2, \quad (3.14)$$

где  $d$  — расстояние между осями.

**Пример.** Определим момент инерции материального круга относительно оси, перпендикулярной плоскости круга и проходящей через точку, находящуюся на расстоянии  $R$  от его центра (рис. 3.6):

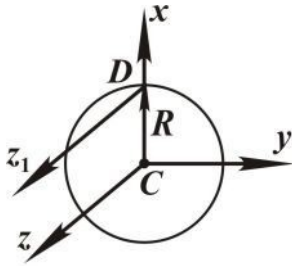


Рис. 3.6

так как

$$J_{z_1} = J_{Cz} + MR^2,$$

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} MR^2, \text{ то}$$

$$J_{z_1} = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

### 3.5. Работа силы. Мощность

В курсе физики понятие работы вводится следующим образом. Пусть материальная точка  $M$  движется по прямой линии  $BC$  и на нее действует сила  $\vec{F}$ , постоянная по модулю и направлению (рис. 3.7).

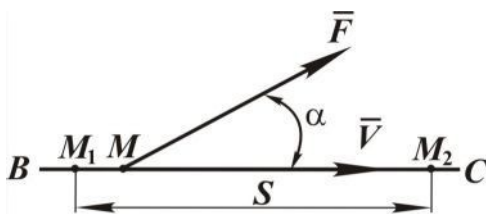


Рис. 3.7

Угол между силой  $\vec{F}$  и скоростью  $\vec{V}$  точки обозначим через  $\alpha$ . Тогда работа постоянной силы  $\vec{F}$  на прямолинейном перемещении точки  $M_1, M_2$  определяется как произведение модуля силы на величину перемещения  $S$   $M_1, M_2$  и на косинус угла между ними, то есть

$$A_{1,2} = F S \cos \alpha. \quad (3.15)$$

Это же равенство можно записать в виде скалярного произведения:

$$A_{1,2} = \vec{F} \cdot \vec{S}, \quad (3.16)$$

где  $\vec{S} = \overline{M_1 M_2}$  - вектор перемещения точки.

В системе СИ единицей измерения работы является Джоуль,  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм}$ .

Формулы (3.9) и (3.10) справедливы в случае действия постоянной силы как по модулю, так и по направлению, а также тогда, когда точка движется только прямолинейно. В случае переменной силы и криволинейной траектории движения точки определяется вначале элементарная работа

$$dA = F \cos \alpha dS, \quad (3.17)$$

где  $dS$  - дифференциал перемещения точки. Так как дифференциал пе-

перемещения  $dS$  равен модулю дифференциала радиуса-вектора  $d\vec{r}$ , то есть  $dS = dr$ , то элементарную работу можно записать как

$$dA = F dr \cos \alpha$$

или через скалярное произведение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.18)$$

а также через проекции векторов

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.19)$$

Мощность  $N$  силы  $\vec{F}$  определяется как скорость изменения работы

$$N = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad (3.20)$$

или

$$N = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}, \quad (3.21)$$

то есть мощность  $N$  равна скалярному произведению силы  $\vec{F}$  на скорость  $\vec{V}$  точки. Единицей измерения мощности в системе СИ является Ватт,  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .

### 3.6. Работа сил, приложенных к материальной точке и твёрдому телу

**Работа силы тяжести.** Пусть точка  $M$ , на которую действует сила тяжести, перемещается из положения  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в положение  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 3.8).

$M_1(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 3.8).

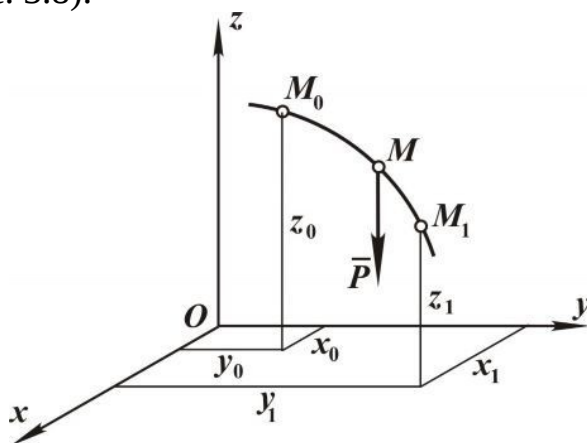


Рис. 3.8

Проекция силы на оси координат  $P_x = 0, P_y = 0, P_z = -mg$ , равны. Используя выражение (3.19), определяем

$$P_z = P.$$

$$A \int_{z_0} P dz = P(z_0, z_1).$$

Если точка  $M_0$  выше  $M_1$ , то  $z_0 > z_1$ , где  $h$  величина вертикального

перемещения точки; если же  $M_0$  ниже  $M_1$ , то  $z_0 < z_1$ .  
 точка точки

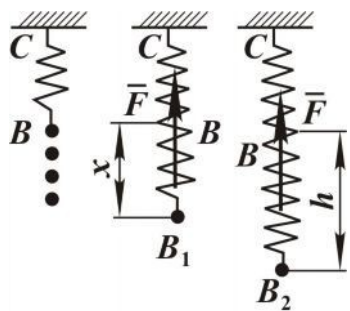
Поэтому можно записать

$$A = Ph - mgh. \quad (3.22)$$

Следовательно, работа силы тяжести равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки её приложения, взятое с соответствующим знаком. Если точка перемещается вверх – то знак минус, если вниз – то плюс.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории перемещения точки.

**Работа силы упругости.** Рассмотрим пружину  $BC$ , конец  $C$  которой закреплён неподвижно (рис. 3.9). При растяжении пружины возникают силы упругости, и на тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины  $\vec{F}$ . Эта сила направлена противоположно перемещению свободного конца пружины, а её модуль пропорционален удлинению пружины:



$$F = c \cdot BB_1,$$

где  $c$  коэффициент жесткости пружины.

Ось  $x$  направим по оси пружины, приняв за начало координат конец недеформированной пружины  $B$ . Проекция силы  $\vec{F}$  на ось  $x$  определяется как

Рис. 3.9

Рис. 3.9

$$F_x = -cx.$$

Вычислим работу силы упругости на перемещении, используя понятие элементарной работы (3.19):

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Проекции силы упругости на оси:

$$F_x = -cx;$$

$$F_y = 0;$$

$$F_z = 0,$$

отсюда элементарная работа силы упругости

$$dA = -cxdx,$$

а работа силы упругости на перемещении  $B_1B_2$   $h$  определяется как

$$A_{1,2} = -c \int x dx = -\frac{c}{2} x^2$$

0

(3.23)

Работа силы упругости отрицательна в том случае, когда деформация увеличивается, то есть когда сила упругости направлена проти-



воположно перемещению её точки приложения, и положительна, когда деформация уменьшается.

**Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.** Пусть сила  $\vec{F}$  приложена в некоторой точке тела, отстоящей от оси вращения  $z$  на величину  $h$  (рис. 3.10).

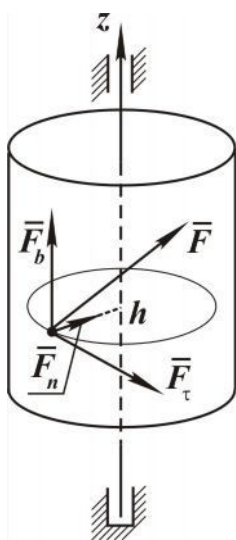


Рис. 3.10

Точка приложения силы описывает при своём движении окружность радиуса  $h$ . Разложим силу  $\vec{F}$  по осям естественного трёхгранника и обозначим её составляющие через  $F$ ,  $F_n$ ,  $F_b$ . Работа составляющих  $\vec{F}_n$  и  $\vec{F}_b$  равна нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению точки их приложения. Следовательно, работа силы  $\vec{F}$  равна работе её касательной составляющей.

Для элементарной работы имеем

$$dA = F_t d s = F h d \varphi,$$

где  $d s = h d \varphi$  — дифференциал дуговой координаты точки приложения силы, а  $d \varphi$  — дифференциал угла поворота тела. Учитывая, что произведение  $F h$  равно

моменту силы  $\vec{F}$  относительно оси вращения тела, получаем

$$dA = M_z d \varphi. \quad (3.24)$$

Элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела. Работа силы  $\vec{F}$  на конечном угле поворота определяется как

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d \varphi, \quad (3.25)$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi$  — начальное и конечное значение угла поворота тела.

Если момент является постоянной величиной, то есть  $M_z = \text{const}$ , то

$$A = M_z (\varphi - \varphi_0). \quad (3.26)$$

Делим обе части равенства (3.24) на  $dt$  и получаем выражение для мощности силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$\frac{dA}{dt} = N, \quad N = M_z \omega. \quad (3.27)$$

Мощность силы  $\vec{F}$ , приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента  $M_z$  этой силы относительно оси вращения на угловую скорость  $\omega$  тела.

### 3.7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Определим связь между работой сил, приложенных к материальной точке, и изменением её скорости движения. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики точки

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

или

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F},$$

где  $\bar{F}$  — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Умножим скалярно обе части этого выражения на дифференциал радиуса-вектора  $d\bar{r}$  :

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (3.28)$$

Видно, что правая часть является элементарной работой  $dA$  сил, действующих на точку. Левую часть можно представить в виде

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} dt = m \bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} dt = \frac{d(mV^2)}{2},$$

при этом учтено, что  $\bar{v} \cdot \bar{v} = V^2$ . С учётом этого равенство (3.28) записывается в форме

$$\frac{d(mV^2)}{2} = dA. \quad (3.29)$$

В левой части

$$\frac{mV^2}{2} = T \quad (3.30)$$

есть кинетическая энергия материальной точки. С учётом (3.24) выражение (3.29) принимает вид

$$dT = dA \quad (3.31)$$

и представляет собой математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе всех действующих на эту точку сил.*

Разделив обе части равенства (3.31) на  $dt$ , получаем

$$\frac{dT}{dt} = N, \quad (3.32)$$

так как

$$\frac{dA}{dt} = N.$$

Таким образом, *полная производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности всех действующих на точку сил.*

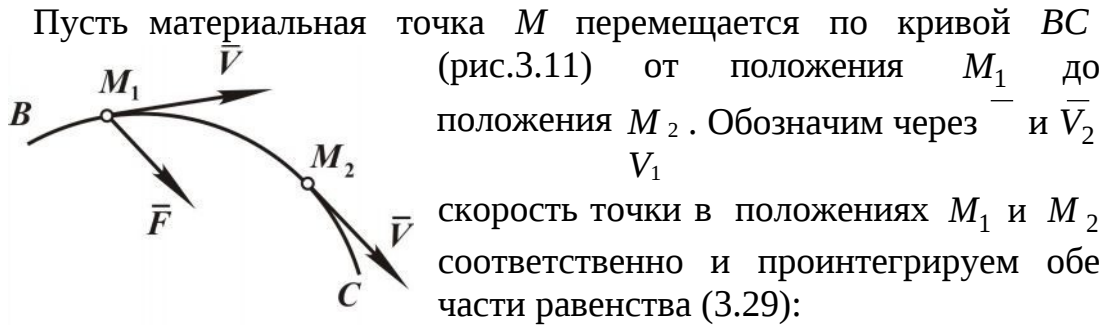


Рис. 3.11

Пусть материальная точка  $M$  перемещается по кривой  $BC$  (рис.3.11) от положения  $M_1$  до положения  $M_2$ . Обозначим через  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  скорость точки в положениях  $M_1$  и  $M_2$  соответственно и проинтегрируем обе части равенства (3.29):

$$\int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_{M_1}^{M_2} dA.$$

Правая часть этого равенства равна работе  $A_{1,2}$  силы на перемещении  $M_1M_2$ .

Таким образом, после интегрирования и подстановки пределов имеем

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{1,2}, \tag{3.33}$$

то есть *изменение кинетической энергии материальной точки, при переходе её из начального положения в конечное, равно работе силы, приложенной к точке.* Это есть интегральная форма теоремы.

### 3.8. Кинетическая энергия материальной системы

Как было установлено, кинетическая энергия материальной точки определяется как

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

то есть половина произведения массы  $m$  точки на квадрат её скорости.

*Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех точек, входящих в систему, таким образом*

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k V_k^2. \tag{3.34}$$

$k 1$

Здесь скорости  $V_k$  определяются относительно неподвижной системы координат, то есть это абсолютные скорости. Из кинематики

сложного движения точки известно, что абсолютное движение можно представить состоящим из переносного и относительного движений. Такой подход довольно часто позволяет упростить вычисление кинетической энергии системы.

Итак, движение системы рассматриваем относительно неподвижных осей  $Ox_1$  (рис. 3.12). Вводим подвижные координатные оси

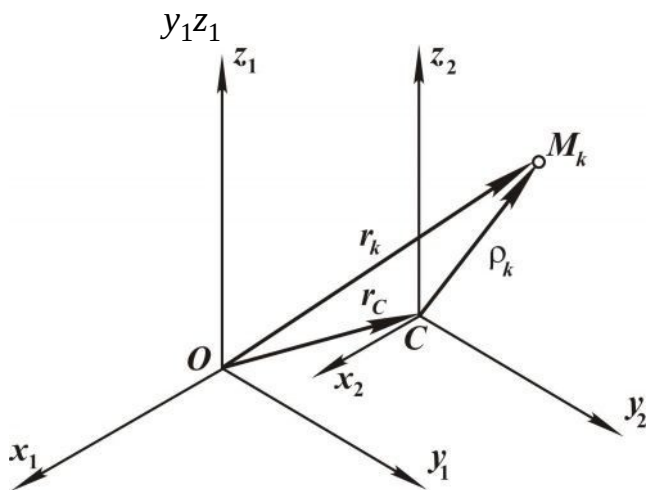


Рис. 3.12

$Sx_2 y_2 z_2$ , перемещающиеся поступательно относительно неподвижных осей, причём начало координат совпадает с центром масс. Пусть  $M_k$  одна из точек материальной системы массы  $m_k$ . Положение точки  $M_k$  относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_k$ , а относительно подвижной радиусом-вектором  $\vec{r}_k$ . Центр

масс  $C$  системы определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_C$ .

На основании теоремы о сложении скоростей абсолютная скорость точки  $M_k$

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{ek} + \vec{V}_{rk}, \quad (3.35)$$

где  $\vec{V}_{ek}$  - переносная скорость,  $\vec{V}_{rk}$  - относительная скорость.

Так как подвижная система координат  $Sx_2 y_2 z_2$  совершает поступательное движение, то переносные скорости всех точек одинаковы и равны скорости  $\vec{V}_C$ , отсюда

$$\vec{V}_{ek} = \vec{V}_C + \vec{V}_{rk}, \quad (3.36)$$

подставив (3.36) в выражение кинетической энергии (3.34), имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{V}_C + \vec{V}_{rk})^2.$$

Возведём скобку в квадрат и разобьём сумму на три части

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_C^2 + \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_C \cdot \vec{V}_{rk} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_{rk}^2 \quad (3.37)$$

Здесь учтено, что скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля, то есть

$$\vec{V}^2 = V^2;$$

C C

Последнее слагаемое  $-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \overline{V_{rk}^2}$  - есть кинетическая энергия  $T_r$

относительного движения.

В первом слагаемом множитель  $V_C^2$  не зависит от индекса суммирования и его можно вынести за знак суммы, то есть

$$\frac{1}{2} V_C^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M V_C^2.$$

Сумма  $\sum_{k=1}^n m_k$  есть масса  $M$  всей системы, отсюда

$$T_C = \frac{1}{2} M V_C^2,$$

что представляет собой кинетическую энергию центра масс системы.

Рассматриваем второе слагаемое выражения (3.37). Выносим  $V_C$  за знак суммы, имеем

$$V_C \sum_{k=1}^n m_k \overline{V_{rk}}.$$

Это выражение равно нулю, так как

$$\sum_{k=1}^n m_k \overline{V_{rk}} = 0.$$

Определяем относительный радиус-вектор центра масс

$$\sum_{k=1}^n m_k \overline{r_{rk}} = \sum_{k=1}^n m_k \overline{r}_k,$$

где  $\overline{r}_k$  - относительный радиус-вектор, определяющий положение точки с номером  $k$  относительно начала подвижной системы координат.

В связи с тем, что центр  $C$  масс системы совпадает с началом подвижной системы координат  $Cx_2y_2z_2$ ,  $\overline{r}_C = 0$  и, соответственно,

$$\sum_{k=1}^n m_k \overline{r}_k = 0.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\overline{V_{rk}}}{dt} = 0.$$

Таким образом, выражение (3.37) для кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + T_r \quad (3.38)$$

Кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении складывается из кинетической энергии ( $\frac{1}{2} MV^2$ ) центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии  $T_r$  системы в ее относительном движении.

### 1.1. Кинетическая энергия твердого тела

Так как твердое тело рассматривается как непрерывно распределенная масса, то все суммы, входящие в выражения для кинетической энергии материальной системы, переходят в интегралы, а масса  $m_k$  отдельной точки заменяется дифференциалом  $dm$ . Поэтому для твердого тела формула (3.32) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm, \quad (3.39)$$

где интегрирование производится по всей массе тела.

Определим кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

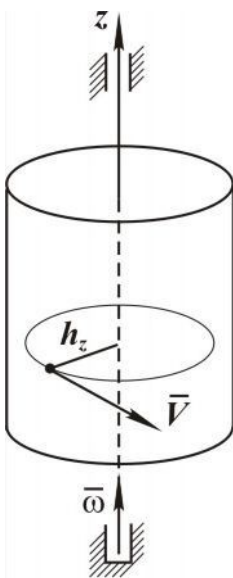


Рис. 3.13

**Поступательное движение.** При поступательном движении твердого тела скорости всех точек одинаковы. Поэтому в формуле (3.39)  $V$  можно вынести

за знак интеграла, то есть

$$T = \frac{1}{2} V^2 \int dm = \frac{1}{2} MV^2, \quad (3.40)$$

где  $M = \int dm$ .

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.

**Вращательное движение.** При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 3.13) модуль скорости любой точки определяется по формуле

$$V = h_z \omega,$$

где  $\omega$  — модуль угловой скорости тела,  $h_z$  — расстояние точки до оси вращения  $z$ .



- кратчайшее расстояние от

Подставляя в формулу (3.40) значение скорости  $V$ , получаем

$$T = \frac{1}{2} \int h^2 dm,$$

или, вынося за знак интеграла  $\frac{1}{2}$ , так как угловая скорость для всех точек тела одинакова, имеем

$$T = \frac{1}{2} \int h^2 dm.$$

Интеграл  $\int h^2 dm$  зависит только от характера распределения массы по объему тела и не зависит от кинематического состояния. Он называется моментом инерции тела относительно оси  $z$  и обозначается символом  $J_z$ .

$$J_z = \int h^2 dm. \quad (3.41)$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (3.42)$$

то есть кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

*Момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении.*

**Плоскопараллельное движение.** При плоском движении твердого тела вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  всегда перпендикулярен к плоскости движения. Для определения кинетической энергии тела воспользуемся формулой (3.38)

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2, \quad (3.43)$$

учитывая, что момент инерции  $J_C$  определяется относительно оси, проходящей через центр масс тела.

## 1.2. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Установим взаимосвязь между изменением кинетической энергии материальной системы и работой приложенных сил.

Рассматриваем два момента времени: начальный  $t_0$  и текущий, или конечный,  $t$ .

Пусть модуль скорости точки с индексом  $k$  в момент времени  $t_0$  равняется  $V_{0k}$ , а в момент времени  $t$  —  $V_k$ .

Записываем для каждой точки теорему об изменении кинетиче-

ской энергии (3.33):

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} - \frac{m_1 V_{01}^2}{2} = A_1,$$

.....

$$\frac{m_n V_n^2}{2} - \frac{m_n V_{0n}^2}{2} = A_n.$$

Складывая почленно все равенства, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{0k}^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_k, \quad (3.44)$$

или, учитывая выражение для кинетической энергии системы (3.34), имеем

$$T_1 - T_0 = A, \quad (3.45)$$

где  $T_0 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{0k}^2}{2}$  - начальное значение кинетической энергии,  
 $T_1 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}$  - конечное значение кинетической энергии,

$A$  - работа всех внешних и внутренних сил системы.

Равенство (3.45) представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме: *изменение кинетической энергии материальной системы при переходе ее из начального в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении всех действующих на систему сил.*

Продифференцируем равенство (3.45) по времени:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT_0}{dt} + \frac{dA}{dt},$$

так как  $T_0$

есть величина постоянная, то

$$\frac{dT_0}{dt} = 0,$$

а  $\frac{dA}{dt}$  - мощность сил, получим

$$\frac{dT}{dt} = N. \quad (3.46)$$

Это уравнение представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *производная кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех сил, приложенных к системе.*

**Пример.** Груз 1 массой  $m_1$  поднимается с помощью электрической лебедки (рис. 3.14). Барабан 2 приводится во вращение электромотором, который создает постоянный вращающий момент  $M_0$ . Моменты инерции блока 3 и барабана 2 относительно их осей вращения равны соответственно  $J_3$ ,  $J_2$ , а их радиусы  $R$  и  $r$ . Определить угловую скорость вращения барабана 2 в тот момент, когда груз 1 поднимется на высоту  $h$ . В начальный момент система находилась в покое. Массой троса пренебречь.

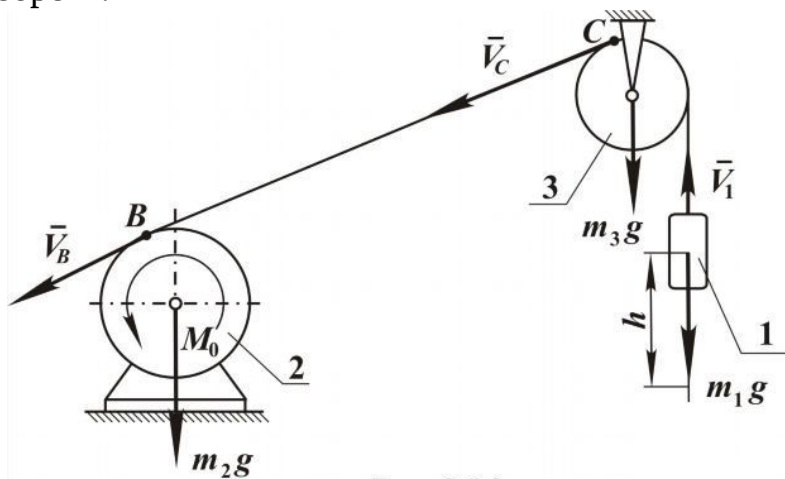


Рис. 3.14

**Решение.** Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы

$$T - T_0 = A,$$

и так как в начальный момент система находилась в покое, то

$$T_0 = 0,$$

поэтому имеем

$$T = A,$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы в конечный момент времени,  $A$  — работа сил, действующих на систему. Определяем кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где  $T_1$ ,  $T_2$ , — кинетическая энергия груза, блока и барабана соответственно.

Барабан и блок вращаются вокруг неподвижных осей, поэтому согласно формуле (3.42)

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

где  $\omega_2, \omega_3$  - угловые скорости барабана и блока. Скорость точки  $B$  ка-

сания троса с барабаном равна  $V_B = 2R \cdot \omega$ . Эту же скорость имеет и точка  $C$  касания троса с блоком, т.е.  $\bar{V}_C = \bar{V}_B$ . Зная скорость  $\bar{V}_B$ , находим угловую скорость блока

$$\omega = \frac{V_B}{2R}$$

откуда

$$V_B = \frac{2R \cdot \omega}{2} = R \cdot \omega$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} J \frac{R^2}{r^2} \omega^2$$

Груз 1 движется поступательно со скоростью

$$V_1 = V_C = 2R \cdot \omega,$$

так как трос нерастяжим.

Кинетическая энергия груза 1 равна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

Подставляя выражения  $T_1, T_2, T_3$  в выражение кинетической энергии системы, получаем

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} \omega^2,$$

где приведенный к оси вращения барабана момент инерции системы определяется равенством

$$J_{\text{пр}} = J_2 + J_3 + \frac{R^2}{r^2} m_1 R^2$$

Перейдем теперь к определению работ. Работа сил тяжести барабана и блока, а также реакций их опор равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Работа силы тяжести груза равна:

$$A_1 = m_1 g h.$$

Работу вращающего момента  $M_0$  вычисляем по формуле (3.32)

где  $\varphi$

$$A_2 = M_0 \varphi,$$

- угол поворота барабана, равный  $h/R$ ; таким образом,

$$A_2 = M_0 h/R.$$

Работа всех сил, действующих на систему, равна

$$A = A_1 + A_2 = m_1 g h + M_0 \frac{h}{R}.$$

$h$

Подставляя значения  $T$  и  $A$  в формулу  $T = A$ , получаем

$$1 \quad J^2 M \quad h \quad mgh, \quad \text{---}$$

$$2 \quad \text{пр } 2 \quad 0 \quad R \quad 1$$

откуда находим угловую скорость барабана

$$2 \quad \sqrt{\frac{2}{J_R^2} (-M_0 \mu_1 \dots)}$$

### 1.3. Метод кинестатики (Принцип Даламбера)

Для решения задач динамики несвободной материальной точки удобным является метод кинестатики. Содержание этого метода заключается в следующем. Записываем основное уравнение (3.1) динамики точки в виде

$$\begin{aligned} & \overline{F} - \overline{R} = (m\overline{a}) \quad 0. \\ \text{Введя} & \quad \overline{F} - \overline{R} = \overline{\Phi}, \text{ получаем} \\ \text{обозначение} & \quad \overline{F} - \overline{R} = \overline{\Phi} = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Вектор  $\overline{\Phi}$ , равный по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется силой инерции.

Равенство (3.47) представляет собой уравнение движения материальной точки, записанное в форме условия равновесия сил. В этом и заключается существо метода кинестатики.

Метод кинестатики является формальным приемом сведения уравнения динамики к форме уравнения статики.

Реакция связи, в соответствии с уравнением (3.47), равна

$$\overline{R} = (\overline{F} - \overline{\Phi}).$$

Для решения конкретных задач векторное уравнение (3.47) необходимо спроецировать на соответствующие оси координат, в частности, на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} F_x - R_x - \Phi_x &= 0; \\ F_y - R_y - \Phi_y &= 0; \\ F_z - R_z - \Phi_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

и на оси естественного трехгранника:

$$\begin{aligned} F_\tau - R_\tau - \Phi_\tau &= 0; \\ F_n - R_n - \Phi_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Так же как и для одной материальной точки, дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно при определении динамических реакций опор твердого



тела.

Рассматриваем материальную систему, состоящую из  $n$  материальных точек.

Для каждой точки запишем основное уравнение динамики –

$$m_k a_k = \bar{F}_k - \bar{R}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и придадим вид уравнений статики

$$\bar{F}_k - \bar{R}_k - \bar{\Phi}_k = 0, \quad (3.50)$$

где сила инерции  $\bar{\Phi}_k = m_k a_k$ .

Складывая почленно все уравнения (3.50), получим

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{R}_k - \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = 0.$$

*Первая сумма*  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  равна главному вектору  $\bar{F}$  всех активных сил, приложенных к системе.

*Вторая сумма*  $\sum_{k=1}^n \bar{R}_k$  – главному вектору  $\bar{R}$  реакций связей.

*Третья сумма*  $\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k$  – главному вектору  $\bar{\Phi}$  сил инерции.

Учитывая это, записываем уравнение кинестатики

$$\bar{F} - \bar{R} - \bar{\Phi} = 0, \quad (3.51)$$

которое можно прочесть следующим образом:

*В каждый момент времени движения материальной системы сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.*

Выберем произвольный неподвижный центр  $O$ , и положение каждой точки  $M_k$  определим с помощью радиуса вектора  $\bar{r}_k$ . Умножая каждое из уравнений (3.50) векторно слева на соответствующий  $\bar{r}_k$  и складывая почленно все произведения, получаем

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \bar{R}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \bar{\Phi}_k = 0.$$

Первая сумма равна главному моменту  $M_O^F$  всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма – главному моменту  $M_O^R$  всех реакций связей системы, а последняя – главному моменту  $M_O^\Phi$  сил инерции. Следовательно, имеем

$$M_O^F + M_O^R + M_O^\Phi = 0, \quad (3.52)$$

то есть *в каждый момент времени движения материальной*

системы сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.

При решении конкретных задач от двух векторных уравнений (3.51), (3.52) переходят к шести уравнениям в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{array}{l}
 F^x \quad R^x \quad \Phi^x \quad 0; \\
 F^x \quad R^x \quad \Phi^x \quad 0; \\
 F^y \quad R^y \quad \Phi^y \quad 0; \\
 M^{F^z} \quad M^{R^z} \quad M^{\Phi^z} \quad 0; \\
 M^F \quad M^R \quad M^\Phi \quad 0; \\
 M^F \quad M^R \quad M^\Phi \quad 0.
 \end{array}
 \tag{3.53}$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве, но только каждый раз следует правильно определять проекции главного вектора  $\Phi$  и главного момента  $M_\Phi$  сил инерции.

Движение твердого тела полностью определяется этими шестью уравнениями кинетостатики, так же как равновесие твердого тела вполне определяется аналогичными шестью уравнениями за исключением проекций главного вектора сил инерции  $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z$  и проекций главного момента сил инерции  $M_x^\Phi, M_y^\Phi, M_z^\Phi$ .

Если рассматриваемая система состоит из нескольких тел, то уравнения кинетостатики можно составить для всей системы и для каждого тела в отдельности.

**Пример.** Тело массой  $m$  может скользить по поверхности призмы, имеющей угол наклона (рис. 3.15). С каким ускорением  $\bar{a}$  должна двигаться призма по горизонтальной поверхности, чтобы тело относительно призмы оставалось неподвижным? Трение скольжения между телом и призмой отсутствует.

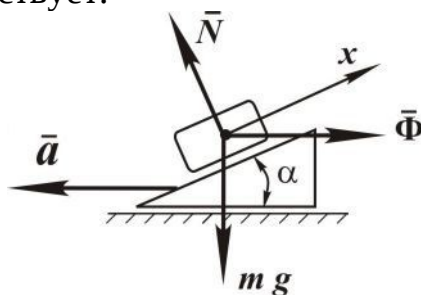


Рис. 3.15

**Решение.** Изображаем действующие на тело силы:  $mg$  — сила

тяжести,  $\bar{N}$  нормальная реакция и  $\bar{\Phi}$  сила инерции, которая по модулю равна произведению массы тела на ускорение движения, то есть  $\Phi = ma$  и направлена в противоположную сторону вектора ускорения  $\bar{a}$ .

С телом связываем ось  $x$ , направленную перпендикулярно реакции  $\bar{N}$ , так как по условию реакцию  $N$  находить не требуется.

Проецируем все силы на ось  $x$

$$\Phi \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

то есть записываем уравнение кинестатики, откуда находим силу инерции

$$\Phi = mg \operatorname{tg} \alpha$$

и затем ускорение призмы

$$ma = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Видим, что ускорение должно быть тем больше, чем больше угол  $\alpha$ . При  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , стремящемся к  $\frac{\pi}{2}$ , ускорение стремится к бесконечности.

**Пример.** Центр тяжести  $C$  махового колеса смещен относительно его оси вращения на величину 1 мм. Ось вращения вала горизонтальна (рис. 3.16). Масса колеса  $m=300$  г, колесо находится на валу посередине между подшипниками и вращается равномерно, делая  $n = 1200$  об/мин.

Найти статические и добавочные динамические реакции подшипников.

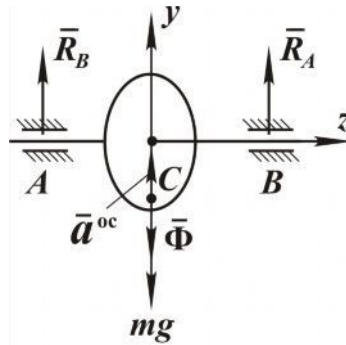


Рис. 3.16

**Решение.** Вначале определим статические реакции подшипников, направленные перпендикулярно оси вала, обозначив их  $R_{1A}, R_{1B}$ . Проецируем все силы на ось  $y$ :

$$R_{1A} - R_{1B} - mg = 0.$$

Здесь сила инерции не учитывается. Поскольку маховик находится в середине, между подшипниками, то статические реакции равны между собой и их значение определяется так:

$$R_{1A} = R_{1B} = \frac{mg}{2},$$

$$R_{1A} = R_{1B} = 150 \text{ Н}.$$

Для определения добавочных динамических реакций  $R_{2A}, R_{2B}$  воспользуемся методом кинестатики, введя силу инерции  $\bar{\Phi}$  маховика. Так как маховик вращается равномерно, то центр тяжести  $C$  имеет только осеостремительное (нормальное) ускорение  $\bar{a}^{oc}$ , направленное к оси вала и равное  $\omega^2 OC$ .

Здесь  $\omega$  — угловая скорость вращения маховика,

$OC$  — смещение центра тяжести маховика относительно оси вращения.

Следовательно, сила инерции  $\bar{\Phi}$  маховика направлена в противоположную сторону ускорения  $\bar{a}^{oc}$ , поэтому ее еще называют центробежной силой инерции. По модулю она равна

$$\Phi = m\omega^2 OC.$$

Определяем угловую скорость

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

или

$$\omega = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \text{ рад/с}.$$

Записываем уравнение кинестатики в проекции на ось  $y$

$$R_{2A} - R_{2B} - \Phi = 0.$$

Здесь сила тяжести  $m\bar{g}$  не учитывалась.

Находим добавочные динамические реакции:

$$R_{2A} - R_{2B} = \frac{\Phi}{2},$$

$$R_{2A} - R_{2B} = \frac{1}{2} m \omega^2 OC,$$

$$R_{2A} - R_{2B} = 2400 \text{ Н}.$$

Сравнивая статические и добавочные динамические реакции, видим, что последние в 1,6 раза больше первых. К тому же следует заметить, что динамические реакции пропорциональны квадрату угловой скорости, то есть при ее повышении они будут возрастать по квадратичному закону.

## 4. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Основы расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций составляют часть науки о сопротивлении материалов.

*Сопротивление материалов – это наука о надежности и экономичности элементов конструкций, деталей машин, приборов и механизмов.*

Целью данного раздела является овладение методами анализа и расчета элементов конструкций, сопротивляющихся простейшим видам нагружения, которые обеспечат создание надежных и экономичных конструкций.

Задачи раздела: а) экспериментальное изучение поведения материалов при различных силовых воздействиях и обоснование теоретических положений механики деформирования; б) изучение методов расчета, гарантирующих с заданным коэффициентом запаса, прочность и жесткость элементов конструкций при максимально возможной экономии материала.

### 4.1 Основные понятия и определения

Обеспечить надежное сопротивление элемента или конструкции в целом означает обеспечить их прочность, жесткость, устойчивость и выносливость.

*Прочность* – способность тела сопротивляться внешним нагрузкам.

*Жесткость* – способность тела сопротивляться изменению своих размеров и формы под воздействием внешних нагрузок. (В отличие от теоретической механики в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые тела, то есть тела, которые изменяют свои размеры и форму под нагрузкой).

*Устойчивость* – способность тела под нагрузкой сохранять первоначальную форму устойчивого равновесия.

*Выносливость* – способность материала сопротивляться переменным силовым воздействиям длительное время.

Показателем надежности является коэффициент запаса  $n$  :

$$n \frac{P_{кр}}{P_{max}}, \quad (4.1)$$

где  $P_{кр}$  критическое (предельное) значение параметра (нагрузка, напряжение).  $P_{max}$  наибольшее значение данного параметра в рабочих условиях.

Условие надежности имеет вид

$$n \geq n_{н}, \quad (4.2)$$

здесь  $n$  допускаемое или нормируемое значение коэффициента запаса, которое назначают, исходя из практического опыта создания аналогичных конструкций, уровня техники. Для каждой области техники  $n$  имеет свои границы значений. Так, например, при проектировании стационарных долговременных сооружений  $[n] = 2...5$ , в авиационной технике  $[n] = 1,5...2$ .

#### 4.1.1. Моделирование объекта исследования

Объектом исследования, как было отмечено выше, является элемент конструкции, который может быть изготовлен из любого материала, отличаться большим многообразием формы, на него могут действовать различные нагрузки, а также, в зависимости от перечисленного, может быть и разным характер разрушения.

Для того чтобы охватить отмеченное многообразие материалов, формы, условий нагружения и разрушения, необходимо их модельное представление, которое должно учитывать наиболее значимые и отбрасывать несущественные факторы. Учет всех факторов, конечно, невозможен из-за их неисчерпаемости, поэтому любая модель это приближенное в той или иной степени представление объекта. Таким образом, моделирование необходимо, чтобы на его основе получить расчетные зависимости, справедливые для достаточно широкого диапазона изменения соответствующих факторов.

**Модель материала.** Материал детали представляют однородной, сплошной изотропной средой. Это позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять методы математического анализа.

*Однородность* означает, что тело состоит из материала одной природы, при этом результаты исследования элемента объема можно распространить на все тело, и свойства поверхности можно считать тождественными свойствам внутренних объемов тела.

*Изотропия* независимость свойств материала от направления. Модель материала наделяется такими физическими свойствами,

как упругость, пластичность, хрупкость и ползучесть.

*Упругость* способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

*Пластичность* способность тела сохранять значительные деформации (остаточные) после разгрузки.

*Хрупкость* способность тела разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

*Ползучесть* изменение во времени деформаций и напряжений при действии на тело постоянной внешней нагрузки.

Отмеченные физические свойства зависят от условий окружающей среды (температуры, химического свойства, уровня радиации и др.).

**Модель формы.** Для оценки прочности и жесткости элементов конструкций с целью упрощения расчетов вводят три типа формы тела: стержень; пластину (оболочку); массив.

*Стержень* тело, имеющее поперечные размеры, несоизмеримо малые с его длиной. Стержень может иметь прямолинейную или криволинейную ось, постоянные или переменные по длине размеры и форму сечения.

*Пластина (оболочка)* тело, имеющее размеры в двух направлениях, несоизмеримо большие, чем в третьем, и ограничивающиеся двумя плоскими (криволинейными) поверхностями.

*Массив* тело, имеющее размеры, соизмеримые в трех направлениях.

**Модели нагружения.** *Сила* это мера механического взаимодействия между телами. Силы подразделяются на внешние и внутренние.

*Внешние силы* нагрузки, действующие на тело при его взаимодействии с другими телами.

*Внутренние силы* силы взаимодействия между частями отдельного тела, оказывающие противодействие внешним силам, так как под влиянием внешних сил тело деформируется. Внутренние силы распределены в одних случаях по всей площади поперечного сечения тела равномерно, а в других неравномерно. Если тело внешними силами не нагружено, то принимается, что внутренние силы отсутствуют.

**Модели разрушения.** В зависимости от условий нагружения выделяют статическое и усталостное разрушение.

#### 4.1.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Внутренние силы определяют нагруженность элемента конструкции (детали), поэтому их необходимо уметь определять. Для этого используют метод сечений, который заключается в следующем.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (рис. 4.1,а).

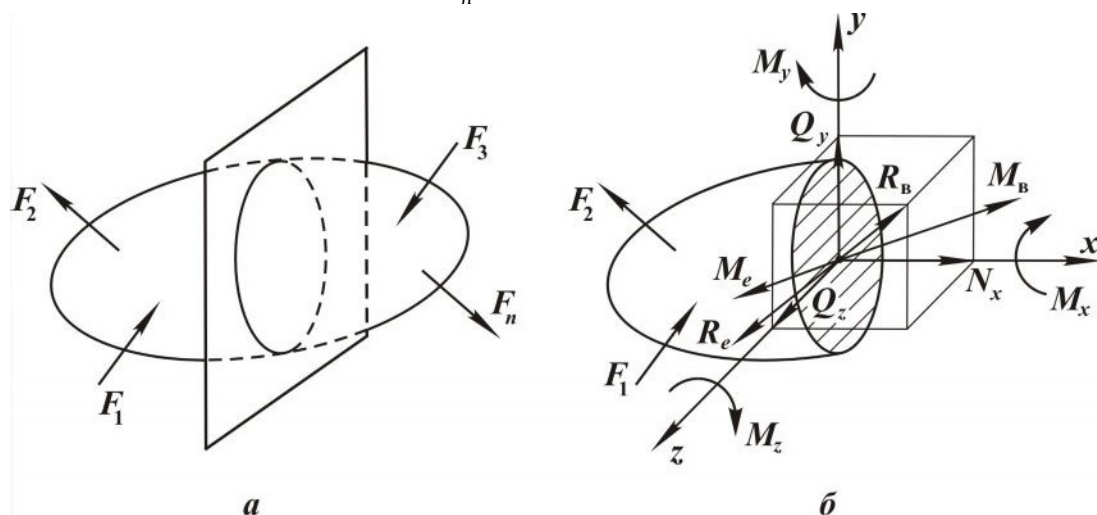


Рис. 4.1

Мысленно разрежем тело плоскостью на две части. Поскольку все тело находится в состоянии равновесия, то в равновесии будет находиться и каждая отсеченная часть.

Рассмотрим, например, левую часть (рис. 4.1,б).

Внешние силы, действующие на отсеченную часть, будут уравновешиваться внутренними, определяющими ее взаимодействие с отброшенной правой частью тела. (Внутренние силы между отсеченными частями также друг друга уравновешивают).

По сечению внутренние силы распределены сложным образом, поэтому их приводят в центре тяжести сечения (точка  $O$ ) к главному вектору  $\bar{R}_в$  и к главному моменту  $\bar{M}$  (рис. 4.1,б).

Внешние силы, действующие на рассматриваемую часть, тоже можно привести в той же точке  $O$  к главному вектору сил  $\bar{R}_e$  и к главному моменту  $\bar{M}_e$ . Так как мысленно отсеченная часть тела находится в равновесии, то  $\bar{R}_в = \bar{R}_e$ ,  $\bar{M}_в = \bar{M}_e$ . Также должны быть равны и их проекции на оси системы координат  $Oxyz$ , помещенной своим началом в точку  $O$  и ориентированной таким образом, что оси  $y$  и  $z$  лежат в



плоскости сечения, а ось  $X$  направлена по нормали и сечению.

Разложим в выбранной системе координат  $Oxuz$  главный вектор

внутренних сил на проекции:  $N_x, Q_y, Q_z$ , а главный момент внутренних сил – на  $M_x, M_y, M_z$  (см. рис. 4.1,б). Эти составляющие называют *внут-*

*ренними силовыми факторами*, причем,  $N_x$  называют нормальной, или продольной, силой,  $Q_y, Q_z$  – поперечными силами,  $M_x$  крутящим моментом,  $M_y, M_z$  – изгибающими моментами.

а

Данные силовые факторы могут быть определены из условий равновесия рассматриваемой части тела:

$$\begin{aligned} X &= 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0; \\ m_x &= 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = 0. \end{aligned}$$

Так, например,  $N_x$  будет равна сумме проекций внешних сил на ось  $x$ , а  $M_x$  – сумме моментов внешних сил относительно оси  $x$ , действующих на рассматриваемую часть тела.

### 4.1.3. Напряжение

*Напряжение* – это количественная мера интенсивности распределения внутренних сил по сечению, определяющая взаимодействие материальных частиц тела. Поэтому степень нагруженности детали определяют не внутренние силы, а напряжения. При достижении ими определенного уровня внутренние связи материальных частиц тела разрушаются. Однако для определения напряжений необходимо знать внутренние силовые факторы. Рассмотрим это подробнее. Пусть тело (рис. 4.2,а) нагружено произвольным образом.

Мысленно разрежем его на две части.

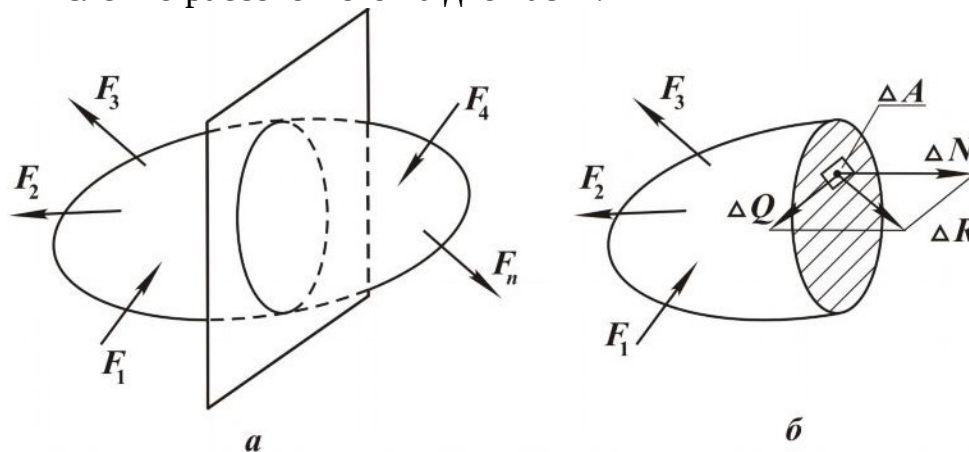


Рис. 4.2

Выделим в окрестности произвольной точки сечения элементарную площадку с площадью  $A$  (рис. 4.2,б).

На этой площадке будет действовать равнодействующая внутренних сил  $R$ . Тогда отношение  $\frac{R}{A}$  будет являться *средним напряжением* на выделенной площадке.

Если размеры площадки уменьшать, то в пределе получим полное напряжение в выбранной точке сечения:

$$\rho \lim_{A \rightarrow 0} \frac{R}{A} \quad (4.3)$$

Практически удобнее рассчитывать не полное напряжение, а его составляющие. Поэтому разложим  $R$  на нормальную  $N$  и касательную  $Q$  составляющие к площадке. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma & \lim_{A \rightarrow 0} \frac{N}{A}; \\ \tau & \lim_{A \rightarrow 0} \frac{Q}{A} \end{aligned} \quad (4.4)$$

будут называться соответственно нормальным и касательным напряжением в точке. При этом полное напряжение в точке может быть определено как

$$\rho \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (4.5)$$

Напряжения в точке зависят от положения плоскости сечения, поэтому, говоря о напряжении, необходимо указывать ориентацию сечения, проходящего через рассматриваемую точку. Совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через рассматриваемую точку, определяет напряженное состояние в точке. Напряжение характеризуется знаком (направлением) и модулем.

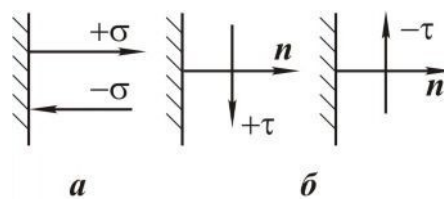


Рис. 4.3

*Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от сечения (рис. 4.3,а).*

*Касательное напряжение считается положительным, если для совмещения нормали к сечению с направлением напряжения ее необходимо повернуть по часовой стрелке (рис. 4.3,б).* Раз-

мерность напряжения  $\frac{H}{m^2}$  Па (Паскаль).

#### 4.1.4. Перемещение и деформация

**Перемещение** это изменение положения в пространстве сечения или всего элемента конструкции. Перемещения подразделяются на линейные и угловые.

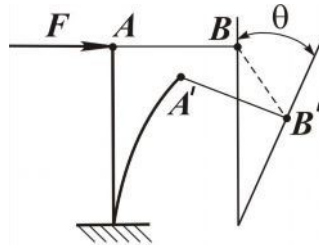


Рис. 4.4

На рис. 4.4 элемент  $OA$  деформируется и перемещается, а  $AB$  только перемещается. Так, для сечения  $B$  отрезок  $BB$  линейное перемещение, угол  $\theta$  угловое перемещение. Перемещения являются следствием деформации.

**Деформация** это геометрическое искажение в окрестности материальной точки.

Деформация тоже подразделяется на линейную и угловую.

Для определения деформации в точке  $B$  рассмотрим два малых отрезка  $AB$  и  $BC$ , выделенных в теле до его деформации и после нагружения (рис. 4.5).

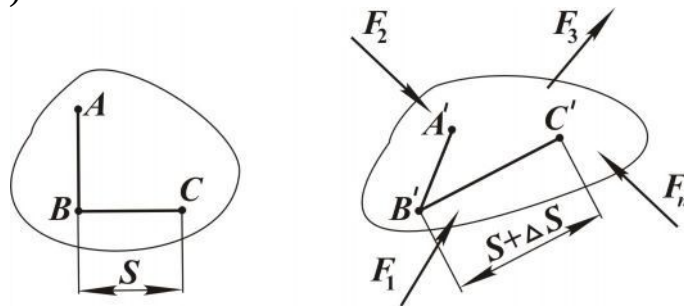


Рис. 4.5

После приложения нагрузки отрезки изменяют свою длину и взаимный угол расположения.

При этом

$$\epsilon_{BC} = \lim_{BC \rightarrow 0} \frac{S}{S_0} \quad (4.6)$$

$$\gamma_{Ae} = \lim_{AB \rightarrow 0, BC \rightarrow 0} (\angle ABC - \angle A_0 B_0 C_0)$$

будут являться соответственно линейной и угловой (сдвиговой) деформацией в точке  $B$ . Совокупность линейных и угловых деформаций по

различным направлениям и плоскостям для одной точки определяют деформированное состояние в точке.

#### 4.1.5. Закон Гука

Английский ученый Р. Гук в конце XVI века сформулировал закон, согласно которому *деформации материала элемента в каждой точке (в определенных пределах) прямо пропорциональны напряжениям в этой же точке и в том же направлении (при нагружении и разгрузении тела):*

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.7)$$

где  $E$ ,  $G$  — модуль нормальной упругости и модуль сдвига соответственно.

Данный закон является основополагающим в расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций.

#### 4.1.6. Принцип независимости действия сил

В условиях выполнения закона Гука и малости деформаций (в условиях упругого деформирования они не превышают 1,5 %) в расчетах используется принцип независимости действия нагрузок.

*Согласно этому принципу результат воздействия системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности, то есть производимый эффект не зависит от порядка приложения внешних сил.*

#### 4.1.7. Виды нагружения

При действии на элемент конструкции внешних сил в его поперечном сечении не всегда возникают все шесть внутренних силовых факторов.

В зависимости от вида и количества силовых факторов в сечении выделяют следующие простейшие виды нагружения: растяжение-сжатие (присутствует только  $N_x$ ); кручение ( $M_x$ ); чистый изгиб ( $M_z$  или  $M_y$ ); плоский поперечный изгиб ( $Q_y$ ,  $M_z$  или  $Q_z$ ,  $M_y$ ).

На практике также имеют место и комбинированные виды нагружения (сложное сопротивление): изгиб при действии нагрузок в разных плоскостях; кручение с изгибом; кручение с растяжением (сжатием); изгиб с растяжением (сжатием) и кручением. Аналитические выражения,

используемые в расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций, зависят от вида нагружения. Поэтому целесообразно перейти к рассмотрению вопросов прочности и жесткости отдельно при каждом простейшем виде нагружения.

## 4.2. Растяжение и сжатие

*Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор – продольную растягивающую (сжимающую) силу  $N_x$ .*

### 4.2.1. Эпюры (диаграммы) внутренних сил

*Эюра внутренних сил* – это график, показывающий характер изменения внутренних сил по длине стержня.

Построение эпюр необходимо для определения положения наиболее нагруженного (опасного) сечения стержня.

Порядок построения эпюр:

1. Определяют все внешние нагрузки (активные и реактивные), действующие на стержень.

2. Стержень мысленно разделяют на силовые участки. *Силовой участок* – это часть стержня, в пределах которой изменение внутреннего силового фактора определяется одним и тем же аналитическим выражением. Силовые участки ограничиваются сечениями, в которых приложены сосредоточенные нагрузки или начинают (заканчивают) действовать распределенные нагрузки.

3. Используя метод сечений, записывают аналитическое выражение для внутреннего силового фактора на каждом силовом участке.

4. По полученным аналитическим выражениям строят эпюры.

Данный порядок построения эпюр внутренних силовых факторов справедлив при любом виде нагружения.

Рассмотрим на примере (см. рис. 4.6) построение эпюры внутренней продольной силы.

**Пример.** Стержень загружен активными сосредоточенными силами ( $F_1 = 10$  кН ;  $F_2 = 25$  кН ), действующими вдоль оси стержня. Собственным весом стержня пренебрегаем (см. рис. 4.6). Построим эпю-

ру внутренних сил ( $N_x$ ) в соответствии с приведенным порядком построения.

### Решение

1. Активные нагрузки вызывают реактивную силу  $R_D$ . Определим ее значение из условия равновесия:

$$\sum X = 0. \quad (4.8)$$

$$X = R_D - R_2 - F_1 = 0;$$

$$R_D = F_2 + F_1 = 15 \text{ кН}.$$

2. Имеем три силовых участка:  $OA$ ,  $AC$ ,  $CD$ .

3. Рассмотрим участок  $OA$ . Начало координат расположим в точке  $O$ . (В дальнейшем начало координат всегда будем располагать в начале каждого силового участка). Ось  $x$  направим вдоль оси стержня. В пределах участка на расстоянии  $x_1$  от его начала мысленно сделаем сечение и рассмотрим равновесие отсеченной части длиной  $x_1$ . (Для участка  $OA$   $x_1$  лежит в пределах  $0 < x_1 < a$ ).

Внутренняя продольная сила должна уравновесить внешние силы, действующие на рассматриваемую часть. Так как собственным весом стержня пренебрегаем, а других внешних нагрузок, действующих на участок длиной  $x_1$ , нет, то внутренняя продольная сила на первом участке  $N_{x_1} = 0$ .

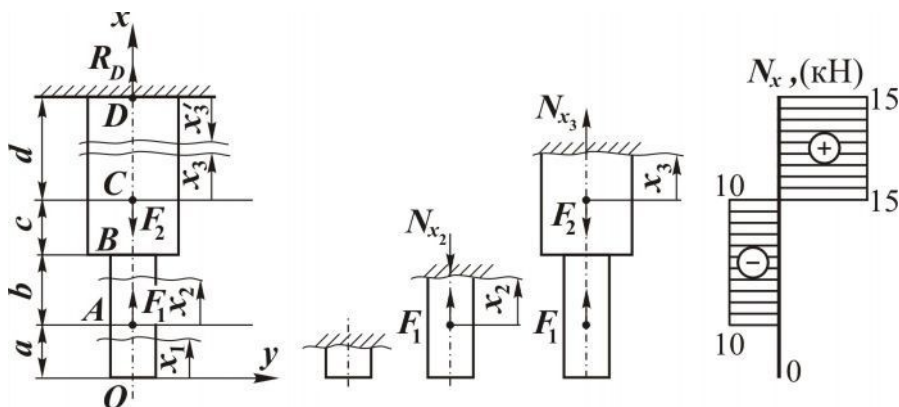


Рис. 4.6

Рассмотрим участок  $AC$ . Делаем сечение на расстоянии  $x_2$  от нового положения начала координат (начало координат переносим в точку  $A$ ). Для участка  $AC$  координата сечения может принимать значения:  $0 < x_2 < b < c$ . Однако, согласно методу сечения, рассматриваем равновесие всей нижней части стержня длиной  $(a + x_2)$ .

**Правило знаков для внутренней силы:** рассматриваемую часть стержня  $(a + x_2)$  мысленно закрепляют в сечении. При этом, если внешняя



сила вызывает растяжение исследуемой части стержня (возможно и не всей), то эта сила создает положительную внутреннюю силу и наоборот.

Для рассматриваемой части внешняя сила  $F_1$  вызывает ее сжатие от сечения приложения  $F_1$  до сечения  $x_2$ .  
силы

Следовательно, внутренняя сила будет отрицательной и по модулю равна  $F_1$ , так как других внешних сил, действующих на рассматриваемую часть ( $a \leq x_2$ ), нет:

$$N_{x_2} = -F_1 = -10 \text{ кН.}$$

*Участок CD.* Начало координат располагаем в точке  $C$ . В пределах участка делаем сечение на расстоянии  $x_3$  от точки  $C$ . Тогда для участка  $CD$ :  $0 \leq x_3 \leq d$ . При этом внутренняя сила  $N_{x_3}$  будет уравновешивать нагрузки, действующие на часть стержня длиной  $a \leq b \leq c \leq x_3$ . Закрепляем эту часть в сечении и в соответствии с правилом знаков записываем аналитическое выражение  $N_{x_3}$ :  
для

$$N_{x_3} = F_1 + F_2 = 15 \text{ кН.}$$

4. Строим эпюру  $N_x$ . Проводим линию, параллельную оси стержня, и откладываем на ней значение внутренних сил на каждом силовом участке. Значение  $N_x$ , равное нулю, соответствует этой линии, положительное значение  $N_x$  откладывается вправо в соответствующем масштабе, отрицательное — влево. Из выражений для  $N_x$  следует, что на участке  $OA$  внутренняя сила равна нулю, на участке  $AC$  она постоянна и вызывает сжатие стержня, на  $CD$  — постоянная растягивающая.

На  $x_2$  внутренняя сила будет резко изменяться (скачком) в эпюре тех сечениях, в которых приложена сосредоточенная внешняя сила. Причем величина скачка равна соответствующей силе.

Так, в сечении  $A$  приложена  $F_1 = 10$  кН и имеем скачок на 10 кН, в сечении  $C$  сила  $F_2 = 30$  кН, скачок  $10 \text{ кН} + 20 \text{ кН} = 30 \text{ кН}$ .

Данную эпюру можно было построить, рассматривая силовые участки сверху:  $DC$ ,  $CA$ ,  $AO$ . Тогда для участка  $DC$  начало координат располагаем в точке  $D$ . Сечение проводим от точки  $D$  на расстоянии  $x_3$  ( $0 \leq x_3 \leq d$ ).

Исследуем равновесия части стержня длиной  $x_3$ , мысленно закрепив ее в сечении. При этом внешняя сила  $R_D$  вызывает ее растяжение (на опору внимание не обращаем, так как ее присутствие выражается

действием силы  $R_D$ ). Тогда  $N_x = R_D = 10$  кН, что совпадает со значением на построенной эпюре.

Следует отметить, так как в данном примере не учитывается собственный вес стержня, то изменение размеров или формы, например в сечении  $B$ , не вызывает изменение внутренней силы  $N_x$ . Это объясняется тем, что  $N_x$  принимается как сосредоточенная в центре тяжести поперечного сечения.

#### 4.2.2. Напряжения в поперечном сечении

Сила  $N_x$  является равнодействующей внутренних сил  $dN$ , действующих на бесконечно малых площадках  $dA$  поперечного сечения площадью  $A$ . Так как  $N_x$  перпендикулярна сечению, то  $dN$  выражаются через нормальные

$$dN = \sigma dA,$$

напряжения тогда

$$N_x = \int_A \sigma dA. \quad (4.9)$$

Эксперименты показывают, что если на поверхность стержня нанести систему взаимно перпендикулярных линий (см. рис. 4.7), то после приложения продольной внешней силы линии переместятся параллельно самим себе. Это означает, что *нормальные напряжения по поперечному сечению распределяются равномерно* (одинаковы во всех точках сечения). Если  $\sigma = \text{const}$ , то из формулы (4.9) получим

$$N = \sigma A,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.10)$$

Следовательно, нормальное напряжение в поперечном сечении при растяжении (сжатии) равно отношению внутренней продольной оси в сечении к площади этого сечения.

*Знак напряжения определяется знаком продольной силы.* Построим эпюру напряжений для ранее рассматриваемого примера (см. рис. 4.7). Пусть  $A_1 = 0,2 \cdot 10^3 \text{ м}^2$ ,  $A_2 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ м}^2$ .

Порядок построения эпюры напряжений  $\sigma_x$  тот же, что и эпюры  $N_x$ . При этом удобно использовать эпюру и выражения для  $N_x$ . Так как  $\sigma_x$  определяется не только от  $N_x$ , но и от  $A_x$ , то для данного стержня будем иметь четыре участка:  $OA$ ;  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ .

$$\text{Участок } OA \text{ (} 0 \leq x_1 \leq a \text{): } \sigma_{x_1} = \frac{N_{x_1}}{A_1}$$

0;

$$\begin{aligned} \text{Участок } AB \text{ (} 0 < x_2 < b \text{): } \sigma_{x_2} &= \frac{N_{x_2}}{A_1} = 50 \text{ [МПа];} \\ \text{Участок } BC \text{ (} 0 < x_3 < c \text{): } \sigma_{x_3} &= \frac{N_{x_3}}{A_2} = 25 \text{ [МПа];} \\ \text{Участок } CD \text{ (} 0 < x_4 < d \text{): } \sigma_{x_4} &= \frac{N_{x_4}}{A_3} = 37,5 \text{ [МПа];} \end{aligned}$$

По полученным значениям  $\sigma_{x_i}$  строим эпюру.

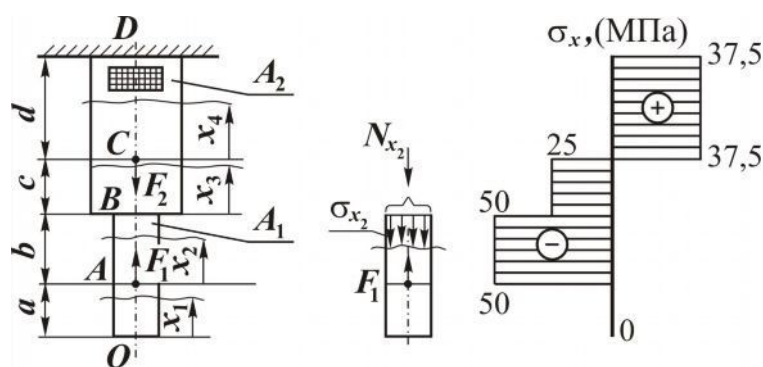


Рис. 4.7

### 4.2.3. Условие прочности

Проектируемые (работающие) элементы конструкции должны быть прочными, то есть способными сопротивляться действию внешних нагрузок, не разрушаясь. Такое состояние обеспечивается выполнением условия прочности, которое основано на сопоставлении максимального напряжения ( $\sigma_{\max}$ ) в элементе конструкции, возникающего от внешних нагрузок с максимально допустимым напряжением  $[\sigma]$  для материала, из которого изготовлен данный элемент (деталь):

$$\sigma_{\max} \leq \frac{N_{\text{рас}}}{A} \leq [\sigma], \quad (4.11)$$

где  $N_{\text{рас}}$  - расчетная внутренняя сила в наиболее нагруженном (опасном) сечении, в котором возникает максимальное напряжение;  $[\sigma]$  - допустимое напряжение для конкретного материала.

В рассмотренном примере (рис. 4.7) максимальное напряжение возникает в поперечных сечениях на участке  $AB$ , следовательно, внутренняя сила,

действующая на этом участке.

Допускаемое напряжение определяется как

$N_{\text{рас}}$  это

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} \quad (4.12)$$

здесь  $\sigma_{\text{пред}}$  предельное напряжение для материала. Для пластичного это предел текучести, для хрупкого — предел прочности. Эти характеристики материала определяются экспериментально (см. параграф 4.2.7);  $n$  — коэффициент запаса прочности. Величина  $n$  назначается, исходя из предшествующего опыта проектирования и эксплуатации подобных конструкций, конкретных условий работы рассчитываемого элемента, степени его ответственности и последствий выхода его из строя.

#### 4.2.4. Деформации и перемещения

До приложения нагрузки в стержне с площадью поперечного сечения  $A$  и длиной  $l$  не возникают напряжения, а, следовательно, отсутствуют и деформации. Выделим в нем элементарный объем со сторонами:  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 4.8).

$dz$

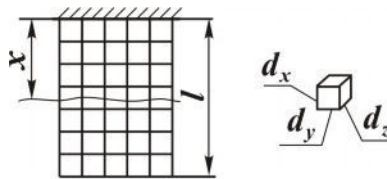


Рис. 4.8

После приложения нагрузки размеры элементарного объема изменятся (рис. 4.9) и будут равны

$$dx \quad dx;$$

$$dy \quad dy;$$

$$dz \quad dz.$$

При этом линейные деформации можно выразить как

$$\varepsilon_x = \frac{dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{dz}{dz} \quad (4.13)$$

Здесь  $\varepsilon_x$  — продольная деформация;  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$  — поперечные деформации.

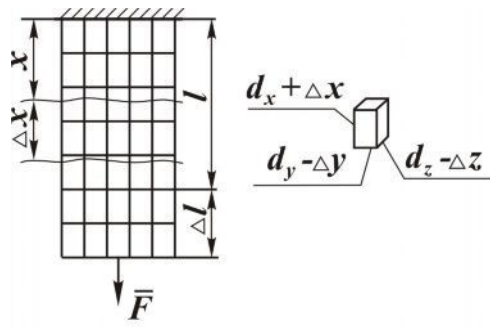


Рис. 4.9



При упругом деформировании отношение поперечной деформации к продольной для конкретного материала является постоянной величиной. Это отношение, взятое по абсолютной величине, называют коэффициентом Пуассона ( $\nu$ ).

$$\left| \frac{\epsilon_{\text{попер}}}{\epsilon_{\text{прод}}} \right|. \quad (4.14)$$

Экспериментально установлено, что, например, для сталей 0,25...0,35. Согласно закону Гука между нормальным напряжением и линейной деформацией при упругом деформировании существует линейная связь. Для растяжения (сжатия) она имеет вид (4.7):

$$E \cdot \epsilon = \sigma. \quad (4.15)$$

Определим перемещение  $x$  сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от опоры (см. рис. 4.9). Согласно (4.13)

Тогда

$$x = \int_0^x \epsilon dx. \quad (4.16)$$

С учетом закона Гука (4.15) или

$$x = \int_0^x \frac{N}{EA} dx. \quad (4.17)$$

Если в пределах рассматриваемого участка стержня  $N = \text{const}$ ;  $A = \text{const}$ ;  $E = \text{const}$  (один и тот же материал), то

$$x = \frac{Nx}{EA}. \quad (4.18)$$

Здесь  $x$  взаимное перемещение сечений стержня, отстоящих на расстоянии  $x$ , при условии, что на этом расстоянии постоянны  $N$ ,  $A$ ,  $E$ . Изменение длины всего стержня (перемещение нижнего сечения относительно опоры) будет равно (см. рис. 4.9)

$$l = \frac{Nl}{EA}. \quad (4.19)$$

Для стержня, имеющего несколько  $n$  участков, для которых постоянны  $N_i$ ,  $A_i$ ,  $E_i$ , изменение всей длины определится как алгебраическая сумма изменений длины стержня  $l_i$  на каждом  $i$  участке. При

этом  
знак

$l_i$  определяется знаком  $N_{x_i}$ :

$$l_i = \frac{N_{x_i}}{E_i A_i} \quad (4.20)$$

**Пример.** Построим эпюру перемещений сечений стержня, изображенного на рис. 4.6, 4.7. Зададим дополнительно:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $a = 0,2$  м;  $b = 0,3$  м;  $c = 0,4$  м;  $d = 0,1$  м.

*Решение*

В соответствии с формулой (4.20) стержень имеет четыре участка: DC, CB, BA, AO.

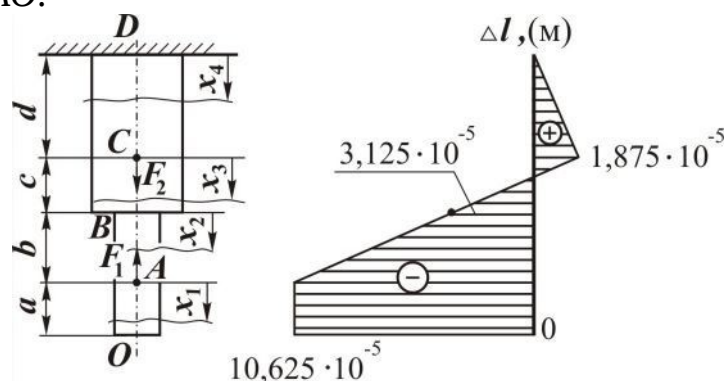


Рис. 4.10

*Участок DC* ( $0 \leq x_1 \leq d$ ). Начало координат в точке D. Перемещение сечения  $x_1$  относительно неподвижного сечения D, с учетом эпюры  $N_x$  и формулы (4.20), будет иметь вид

$$\Delta l_{x_1 D} = \frac{N_{x_1} x_1}{E A_2} \quad (4.21)$$

В выражении (4.21) переменной величиной для участка DC является только  $x_1$ . Рассчитаем перемещение в начале участка ( $x_1 = 0$ ):

$\Delta l_{x_1 D}(x_1 = 0) = 0$  и в конце ( $x_1 = d$ ):

$$\Delta l_{x_1 D}(x_1 = d) = \Delta l_{CD} = \frac{15 \cdot 0,1}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^3} = 1,875 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Здесь  $\Delta l_{CD}$  перемещение сечения C относительно D.

*Участок CB* ( $0 \leq x_2 \leq c$ ). Начало координат в точке C. Перемещение сечения  $x_2$  относительно сечения D можно выразить как алгебраическую сумму перемещений  $\Delta l_{CD}$  и перемещения сечения  $x_2$  относительно сечения C ( $x_2 C$ ):

$$\Delta l_{x_2 D} = \Delta l_{CD} + \Delta l_{x_2 C},$$

или

$$\Delta l_{x_2 D} = \Delta l_{CD} + \frac{N_{x_2} x_2}{E A_2} \quad (4.22)$$

$E A_2$

---

Тогда

$$x_{D(x=0)} = CD = 1,875 \cdot 10^5 \text{ м,}$$

а в конце участка

$$x_{2D(x_2=C)} = BD = 1,875 \cdot 10^5 + \frac{10}{0,4} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^3 = 3,125 \cdot 10^5 \text{ м.}$$

Участок  
BA (0  $x_3$  b):

$$N_{x_3} = E A_1 \cdot x_3,$$

$$x_{3D(x_3=0)} = BD = 3,125 \cdot 10^5 \text{ м,}$$

$$x_{3D(x_3=b)} = AD = 3,125 \cdot 10^5 + \frac{10 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,2 \cdot 10^3} = 10,625 \cdot 10^5 \text{ м.}$$

Участок AO (0  $x_4$  a). Внутренняя сила на данном участке  $N_{x_4} = 0$  (см. рис. 4.6). Следовательно, он не деформируется, хотя и перемещается за счет деформации части стержня DA:

$$x_{4D} = AD = OD.$$

По полученным значениям перемещений в начале и конце каждого участка строим эпюру перемещений (см. рис. 4.10).

Перемещение сечения O относительно D ( $OD$ ) также можно получить, рассматривая действие на стержень отдельно каждой внешней силы.

$$OD = l_{OD} = \frac{F_2 \cdot d}{E A_2} + \frac{F_1 \cdot (c-d)}{E A_2} + \frac{F_1 \cdot b}{E A_1}.$$

Сила  $F_2$  вызывает растяжение участка DC, поэтому берется со знаком плюс,  $F_1$  сжимает AD (знак минус).  $F_1$  выражается

Действие

двумя слагаемыми, так как на участке AD площадь сечения имеет значения  $A_1, A_2$ .

#### 4.2.5. Условие жесткости

Условие жесткости накладывает ограничения на изменение раз-

меров элементов конструкций под действием нагрузок и имеет вид

$$l_{\max} = \frac{N l}{EA_{\max}}$$

или

$$\max \frac{l_{\max}}{l} \quad (4.23)$$

Здесь  $l$ ; - соответственно допускаемое абсолютное и относительное изменение длины наиболее деформируемого участка стержня, регламентируемые для конкретного материала.

#### 4.2.6. Три типа задач

На основе условий прочности и жесткости для конкретной расчетной схемы могут решаться три типа задач (при любом виде нагружения).

1. *Проверочный расчет.* Цель расчета - проверка условий прочности и жесткости при следующих известных параметрах: внешние нагрузки, размеры конструкции и ее элементов, материал элементов конструкции , .

2. *Проектный расчет.* Цель расчета - определение размеров элементов конструкции, если известны внешние нагрузки и материал элементов конструкции. При данном расчете возможен и подбор материала для заданных размеров деталей.

3. *Расчет допустимых нагрузок.* Цель расчета - определение максимально допустимых внешних нагрузок для заданных размеров элементов конструкции и выбранном материале.

#### 4.2.7. Механические испытания материалов

В расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций необходимо знать механические свойства материалов, из которых они будут изготовлены. Эти свойства изучаются экспериментально при механических испытаниях образцов из конкретных материалов. При испытаниях оцениваются характеристики прочности, пластичности и упругости.

Условия испытания представлены в Государственных стандартах. Существуют стандарты на следующие основные виды нагружения: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Результаты испытания на растяжение во многих случаях позволяют достаточно верно судить о поведении материала и при других видах нагружения.

Рассмотрим подробнее испытание на растяжение. Для испытания на растяжение чаще используются образцы круглого (см. рис. 4.11), реже прямоугольного сечений.

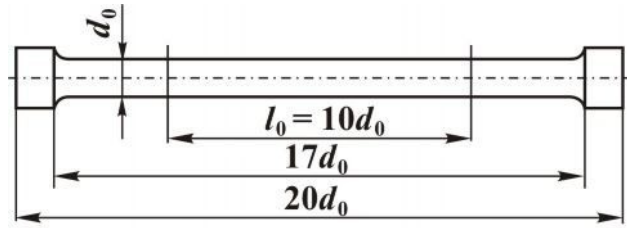


Рис. 4.11

Длину рабочей части образца  $l_0$  принимают больше его диаметра  $d_0$  в 10 раз, допускается и в 5 раз. Концевые утолщения образца необходимы для его закрепления в захватах машины.

На рис. 4.12 приведены диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали и чугуна (пластичного и хрупкого материалов).

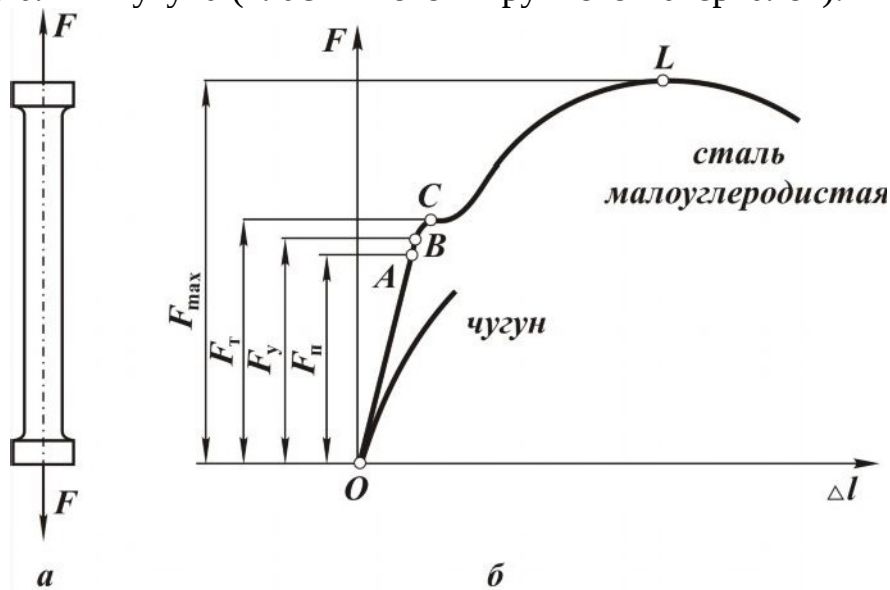


Рис. 4.12

Испытания проводят на универсальных испытательных машинах, имеющих силоизмерительное устройство и аппарат для автоматической записи диаграммы растяжения (сжатия) в координатах: сила  $F$  — удлинение  $l$ .

Такой график зависит от размеров образца и физических свойств материала. Для исключения зависимости от размеров образца диаграмму растяжения перестраивают в координатах: напряжение ( ) — деформация ( ) (см. рис. 4.13).

При этом напряжение и деформация рассчитываются как

$$\sigma = \frac{F}{A_0};$$

$$\varepsilon = \frac{l}{l_0}$$



где  $A_0, l$  - соответственно площадь поперечного сечения и рабочая длина образца до испытания.

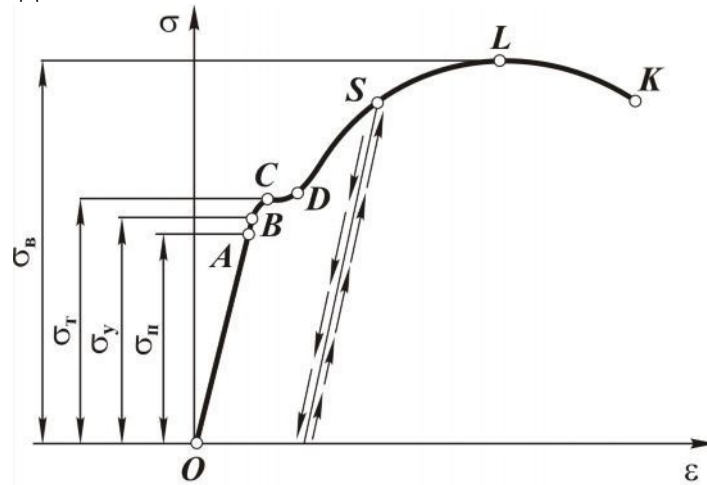


Рис. 4.13

Определим на диаграмме (рис. 4.13) характерные точки и дадим качественную и количественную оценку механическим свойствам материала.

Рассматривается диаграмма малоуглеродистой стали как наиболее показательная при определении характеристик прочности. На диаграмме условно можно выделить четыре зоны.

Первая зона (OB) зона упругого деформирования. При снятии нагрузки в этой зоне деформирования образец принимает начальные размеры. Точка A на оси  $\sigma$  соответствует пределу пропорционально-

ст  $\sigma_n \cdot \sigma_n \frac{F_n}{A_m}$  - это наибольшее напряжение, до которого материал и деформируется в соответствии с законом Гука ( $E$ ).

Точка B соот-

ветствует пределу упругости

$$\sigma_y \cdot \sigma_y \frac{P_y}{A_0} \text{ это наибольшее напряже-}$$

ние, до которого в материале не образуются остаточные деформации.

Вторая зона (BD) называется зоной общей пластичности. Для нее характерно значительное увеличение деформации без заметного роста напряжений за счет одновременных сдвигов в кристаллической решетке по всему объему материала образца. Точка C на диаграмме со-

ответствует пределу текучести  $\sigma_T \frac{P_T}{A_0}$ . Это напряжение, при кото-

ром в материале возникают значительные деформации без заметного

роста напряжений. Для тех материалов, у которых нет выраженной зоны  $BD$ , пределом текучести называется напряжение, соответствующее

остаточной деформации, равной 0,02...0,2 % (условный предел текучести).

Предел текучести является очень важной характеристикой прочности, так как используется для определения допустимого напряжения пластичных материалов:

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где  $n_T$  коэффициент запаса, определяющий во сколько раз максимально допустимые напряжения в реальной конструкции должны быть меньше предела текучести.

Третья зона (*DL*) – *зона упрочнения*. Под *упрочнением* понимается повышение уровня напряжений, до которого материал деформируется упруго. Так, если разгрузить образец из состояния, соответствующего точке *S*, то при последующем нагружении он будет деформироваться упруго до точки *S*, где напряжение выше предела упругости. Это явление повышения предела упругости материала в результате пластического деформирования носит название «*наклёп*» и широко используется в технике. Наклеп при необходимости может быть снят термической обработкой *отжигом*.

*Четвертая зона (LK)* называется *зоной местной текучести*. В этой зоне требуется все меньшая нагрузка для дальнейшего деформирования образца. Это объясняется образованием местного сужения (шейки) в наиболее слабом сечении образца, и дальнейшее деформирование происходит в зоне шейки, где площадь сечения быстро уменьшается. Однако многие материалы разрушаются без заметного образования шейки.

Напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую может выдержать образец (точка *L*), называется *пределом прочности*:

$$\sigma_b = \frac{P_{\max}}{A_0}.$$

Предел прочности используется для определения допустимого напряжения хрупких материалов:

$$\sigma = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

где  $n_b$  коэффициент запаса.

Аналогично определяются характеристики прочности и при других видах нагружения.

### 4.3. Сдвиг. Срез

*Сдвиг* это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только поперечная (перерезывающая) сила  $Q_y$  или  $Q_z$ , а остальные силовые факторы равны нулю (рис. 4.14).

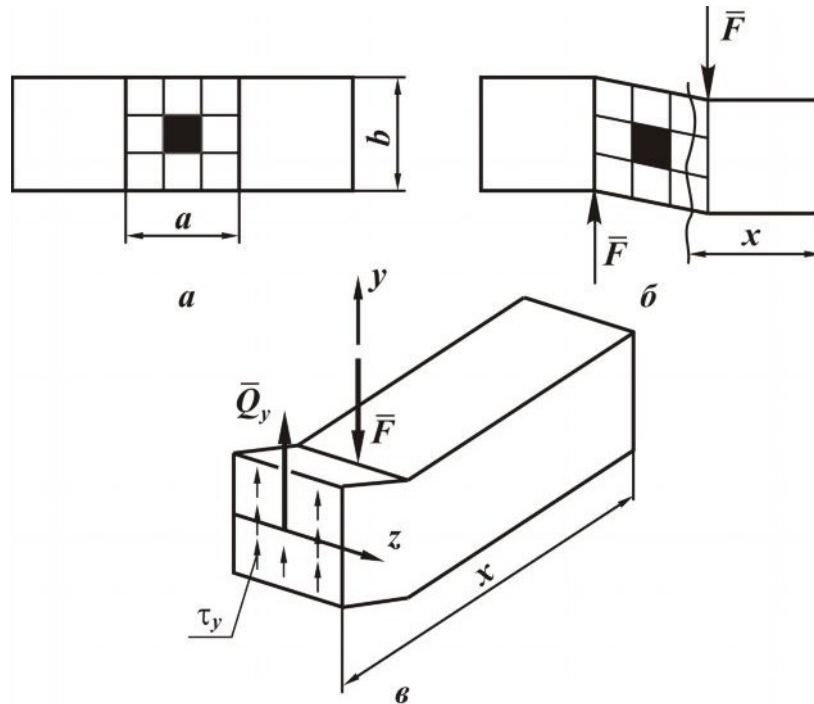


Рис. 4.14

*Срез* это частный случай сдвига при  $c \ll b$ . Примеры среза: разрезание ножницами металлических прутков, пластин и др.

Для определения внутренней силы рассмотрим равновесие мысленно отсеченной правой части стержня длиной  $x$ . При этом внутренняя сила  $Q_y$  равна  $F$  и является равнодействующей касательных напряжений  $\tau_y$ , лежащих в плоскости сечения и направленных параллельно  $F$ .

При сдвиге (срезе) принимается равномерное распределение напряжений по сечению, тогда

$$\tau_y = \frac{Q_y}{A} \quad (4.24)$$

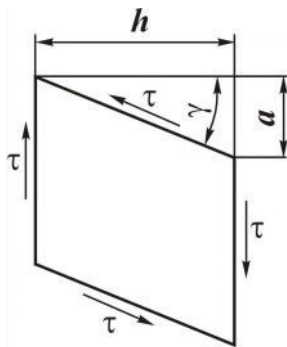
где  $A$  — площадь поперечного сечения стержня.

Условие прочности при сдвиге (срезе) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\text{рас}}}{A} \leq \tau_{\text{доп}} \quad (4.25)$$

где  $Q_{\text{рас}}$  — внутренняя перерезывающая сила в наиболее нагруженном сечении стержня;  $\tau_{\text{доп}}$  — допускаемое напряжение на срез.

Элемент в форме прямоугольника, выделенный на рис. 4.14, после приложения нагрузки получил геометрические искажения (рис. 4.15), которые характеризуются абсолютным сдвигом  $a$  и относительным сдвигом (угол сдвига  $\gamma$ ):



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{h} \quad (4.26)$$

Экспериментально установлено, что при упругом деформировании связь между напряжением и угловой деформацией прямо пропорциональна, то есть соответствует закону Гука:

$$\tau = G \gamma \quad (4.27)$$

Рис. 4.15

Величина  $G$  называется *модулем упругости при сдвиге*.

С позиции прочности на срез рассчитываются различные соединения: заклепочные, резьбовые, сварные, шпоночные и др.

**Пример.** Определить диаметр  $d$  заклепки, если известны: сила  $F$  и допустимое напряжение на срез (рис. 4.16).

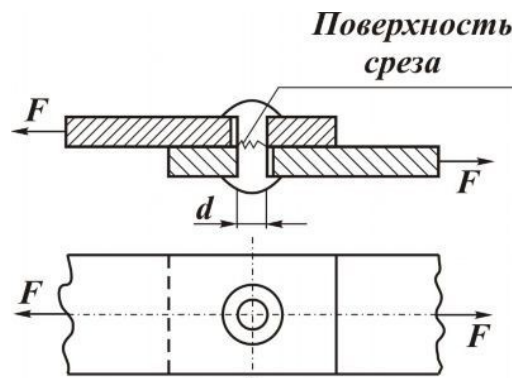


Рис. 4.16

**Решение.** Сила  $F$ , растягивающая листы, вызывает срез заклепки по

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Из условия прочности (4.25)

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]} \quad \text{или} \quad \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

откуда

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma]}}$$

## 4.4. Кручение

*Кручение* это такой вид нагружения, когда из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня возникает только один крутящий момент ( $M_x$ ).

Стержень, работающий на кручение, называют *валом*.

### 4.4.1. Эпюры внутреннего силового фактора

При расчете вала на прочность и жесткость необходимо знать значение внутреннего крутящего момента на каждом силовом участке, то есть иметь эпюру крутящих моментов ( $M_x$ ). Рассмотрим на примере (рис. 4.17) порядок построения  $M_x$  эпюры

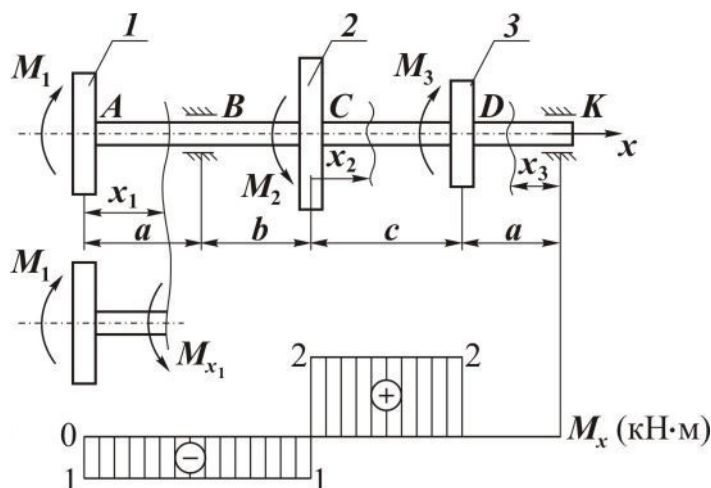


Рис. 4.17

В данном примере вращающий момент  $M_2$  подводится к валу от шкива 2 ременной передачи и снимается с вала через передающие шкивы 1, 3 на другие валы механизма.

Пусть  $M_1$  1 кНм,  $M_2$  3 кНм,  $M_3$  2 кНм.

Для построения эпюры необходимо знать все внешние нагрузки (параграф 4.2.1.). Если моментами сопротивления, которые возникают в опорах (подшипниках) за счет сил трения пренебречь как несоизмеримо малыми по сравнению с  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , то все внешние нагрузки известны.

Далее выделяем силовые участки. *Участки ограничиваются сечениями, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты.* Следовательно, имеем три участка: AC, CD, DK.

Эпюра строится по аналитическим выражениям, полученным на

основе метода сечений, для  $M_x$  на каждом силовом участке. При записи выражения для внутреннего момента необходимо соблюдать *правило знаков: если на исследуемую часть вала посмотреть со стороны сечения, то внешний момент, действующий против часовой стрелки, будет создавать положительный внутренний момент.*

Рассмотрим участок  $AC$  ( $0 < x_1 < a < b$ ).

Начало координат расположим в точке  $A$ . Тогда из условия равновесия части вала длиной  $x_1$  имеем

$$M_{x_1} = M_1 = 1 \text{ кН м.} \quad (4.28)$$

Из выражения (4.28) следует, что на участке  $AC$  внутренний момент постоянный и отрицательный.

Участок  $CD$  ( $0 < x_2 < c$ ).

Начало координат перенесем в точку  $C$ , но исследовать будем всю левую часть до сечения  $x_2$ :

$$M_{x_2} = M_1 + M_2 = 2 \text{ [кНм]}.$$

Внутренний момент на участке  $CD$  постоянный и положительный.

На участке  $DK$  удобнее сделать сечение на расстоянии  $x_3$  от точки  $K$  (начало координат в точке  $K$ ) и исследовать равновесие правой части вала длиной  $x_3$ .

Участок  $KD$  ( $0 < x_3 < a$ ).

$M_{x_3} = 0$ , так как на длине  $x_3$  внешние моменты отсутствуют. По полученным выражениям для  $M_x$  строим эпюру (см. рис. 4.17), из которой следует, что наиболее нагруженными будут сечения вала на участке  $CD$ .

На эпюре  $M_x$  резкое изменение значения момента (скачок) имеет место в тех сечениях, в которых приложены сосредоточенные внешние моменты. Причем величина скачка должна быть равна соответствующему моменту. Это следует иметь в виду при проверке правильности построения эпюры.

#### 4.4.2. Деформации и перемещения

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиусом  $r$ , заделанный одним концом и нагруженный вращающим моментом  $M$  на другом конце (см. рис. 4.18).

Если на боковую поверхность ненагруженного вала нанести сетку (рис. 4.18,а), образованную окружностями и продольными линиями, то ячейка такой сетки будет прямоугольной.

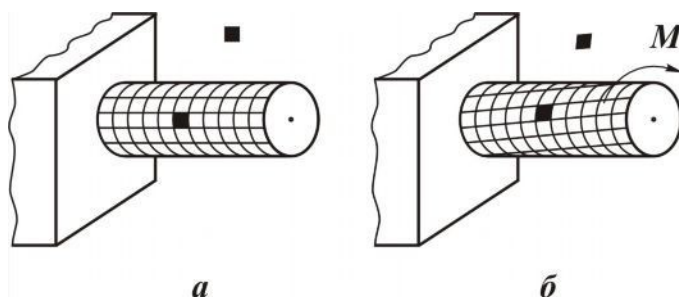


Рис. 4.18

После приложения внешнего момента ячейка получит геометрические искажения (рис. 4.18,б), соответствующие искажениям при сдвиге (см. рис. 4.15). Следовательно, *кручение по своей физической сущности это сдвиг смежных плоских сечений друг относительно друга, приводящий к взаимному повороту отстоящих на некотором расстоянии поперечных сечений.*

Таким образом, получается, что плоские поперечные сечения остаются плоскими и после приложения крутящего момента; радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми; расстояние между поперечными сечениями после нагружения вала не изменяются.

Выразим аналитически взаимосвязь между деформацией и перемещением. В соответствии с принятыми допущениями образующая  $AD$  цилиндрического стержня после приложения момента займет новое положение  $AD_1$  (рис. 4.19).

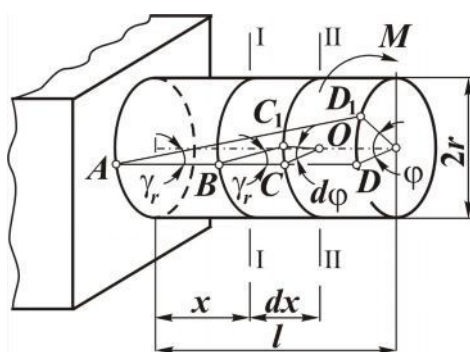


Рис. 4.19

При этом угол  $\gamma_r$  (угол сдвига) определяет угловую деформацию смежных сечений на поверхности вала, а угол  $\varphi$  (угол поворота) показывает, насколько крайнее правое сечение повернулось относительно



сечения в заделке, отстоящее на расстоянии  $l$ , то есть это угловое перемещение.

Выделим сечениями I I и II II элемент длиной  $dx$ , расположенный на расстоянии  $x$  от заделки.

Из рис. 4.19 видно, что сечения I I и II II имеют относительный сдвиг  $r$  и взаимный угол поворота  $d$ . Если из треугольников  $C_1BC$  и  $C_1O$  выразить дугу  $CC_1$  и приравнять, то получим следующее соотношение:

$$dx \cdot r = r \cdot d, \quad (4.29)$$

из которого угол сдвига на поверхности выразится через взаимный угол поворота сечений как

$$r = \frac{d}{dx} \quad (4.30)$$

Из (4.30) следует, что угол сдвига зависит от радиуса цилиндрического стержня. Для элемента длиной  $dx$  с радиусом  $(0 < r)$  угловая деформация, в соответствии с (4.30), запишется в следующем виде:

$$\frac{d}{dx}, \quad (4.31)$$

здесь  $\frac{d}{dx}$  - относительный угол закручивания.

#### 4.4.3. Напряжения в поперечном сечении

Внутренний сосредоточенный момент  $M_x$ , лежащий в плоскости поперечного сечения вала, можно выразить через касательные напряжения, которые, согласно закону Гука, при сдвиге (4.27) связаны с деформацией

$$G \quad (4.32)$$

или, с учетом (4.31),

$$G \frac{d}{dx}. \quad (4.33)$$

Тогда элементарный внутренний момент (см. рис. 4.20)

$$dM = dA \cdot ,$$

где  $dA$  - площадь элементарной площадки, лежащей в сечении вала на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести сечения;  $d$  - элементарная окружная сила.

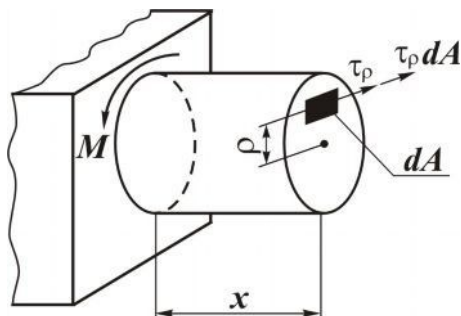


Рис. 4.20

Суммируя элементарные моменты по площади сечения, получаем выражение для внутреннего сосредоточенного момента

$$M_x = \int_A \tau_p dA$$

или, с учетом (4.33),

$$M_x = G \int_A \rho^2 dA dx$$

Так как произведение

$G \rho^2$  постоянно для всех точек сечения, то

$$M_x = G \int_A \rho^2 dA dx$$

Интеграл  $\int_A \rho^2 dA$  представляет собой геометрическую характеристику поперечного сечения и носит название полярного момента инерции сечения.

Таким образом,

$$M_x = G \frac{d}{dx} I_p, \quad (4.34)$$

откуда

$$\frac{d}{dx} I_p = \frac{M_x}{GI}. \quad (4.35)$$

Произведение  $GI$  называется *жесткостью сечения стержня при кручении*. Подставим (4.35) в (4.33) и получим выражение для касательного напряжения

$$\tau_p = \frac{M_x \rho}{I_p}, \quad (4.36)$$

из которого следует, что напряжения вдоль радиуса изменяются по линейному закону и наибольшее напряжение при кручении возникает на периферии сечения:

$$\tau_{\max} = r \frac{M_x}{I} r,$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W},$$

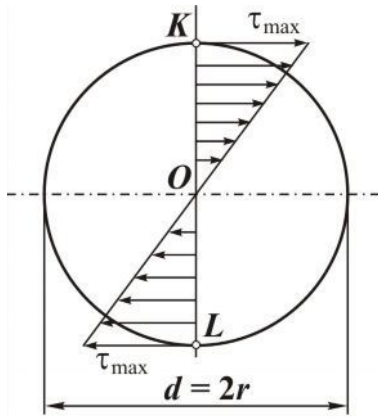


Рис. 4.21

где  $W = \frac{I}{r}$  - геометрическая характеристика сечения, которая называется *полярным моментом сопротивления*.

На рис. 4.21 представлена эпюра касательных напряжений, построенная в соответствии с зависимостью (4.36), для точек, лежащих на диаметре  $KL$ . Из эпюры видно, что наиболее нагруженными будут точки, лежащие на максимальном удалении от центра тяжести сечения. В центре тяжести напряжения равны нулю

$$\left( 0 \quad \frac{M_x}{I} \quad 0 \quad 0 \right).$$

#### 4.4.4. Геометрические характеристики сечения

*Полярный момент инерции*  $I = \int_A \rho^2 dA$ .

Для сечения круглой формы (рис. 4.22)

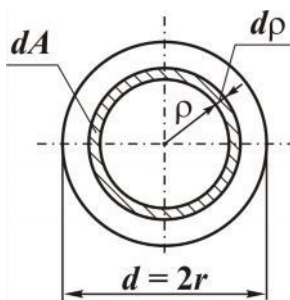


Рис. 4.22

$$dA = 2 \rho d\rho.$$

Тогда

$$I = \int_0^r 2 \rho^3 d\rho = \frac{2}{4} \rho^4 \Big|_0^r = \frac{1}{2} r^4 = \frac{1}{32} d^4, \quad (4.37)$$

где  $d$  - диаметр сечения.

Если в стержне имеется центральное отверстие диаметром  $d$ , а наружный диаметр вала равен  $D$ , то полярный момент инерции

кольцевого сечения

$$I = \frac{D^4}{32} - \frac{d^4}{32} = \frac{D^4 - d^4}{32}$$

$$d^4 \quad (1 \quad D^4). \quad (4.38)$$

*Полярные моменты сопротивления будут равны:*

для сплошного сечения

$$W = \frac{d^3}{16}, \quad (4.39)$$

для кольцевого сечения

$$W = \frac{D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.40)$$

#### 4.4.5. Условие прочности

Условие прочности ограничивает максимальные напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении вала ( $\tau_{\max}$ ) максимально допускаемыми напряжениями  $[\tau]$  для конкретного материала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{рас}}}{W_p} [\tau], \quad (4.41)$$

где  $M_{\text{рас}}$  расчетный внутренний момент (момент в наиболее нагруженном сечении);

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{n},$$

здесь  $\tau_{\text{пред}}$  - предельное напряжение для конкретного материала. Для пластичного это предел текучести, для хрупкого предел прочности. Эти характеристики определяются экспериментально (см. параграф 4.2.7);  $n$  коэффициент запаса прочности (см. параграф 4.2.3).

#### 4.4.6. Расчет перемещений и условие жесткости

Угловое перемещение (взаимный угол поворота  $d$ ) сечений, отстоящих на расстоянии  $dx$  (см. рис. 4.19) может быть определено из выражения (4.35)

$$d = \frac{M_x dx}{G I}.$$

Тогда взаимный угол поворота сечений, отстоящих на расстоянии  $x$  (см. рис. 4.19), равен

$$\int_0^x \frac{M_x dx}{G I}. \quad (4.42)$$

$$G I \quad 0$$

Если крутящий момент  $M_x$ , момент инерции сечения  $I$  и модуль

сдвига  $G$  постоянны на участке длиной  $x$ , то

$$\frac{M_x x}{G I} \quad (4.43)$$

Для рассматриваемого вала (см. рис. 4.19) угол поворота крайнего правого сечения относительно сечения в заделке выразится согласно (4.43)

$$\frac{Ml}{G I} \quad (4.44)$$

При скачкообразном изменении по длине вала крутящего момента (см. рис. 4.17) угол поворота между его начальным и конечным сечениями определяется как сумма углов поворота по участкам с постоянным внутренним крутящим моментом

$$\sum_{i=1}^n M_{x_i} \frac{l_i}{G} \quad (4.45)$$

Условие жесткости накладывает ограничение на взаимный угол поворота крайних сечений наиболее деформированного участка вала  $\theta_{\max}$  и имеет вид

$$\theta_{\max} [\text{рад}], \quad (4.46)$$

а в относительных величинах

$$\theta_{\max} [\%]. \quad (4.47)$$

Здесь  $\theta_{\max}$  - максимальный относительный угол поворота среди участков вала;  $\theta$  и  $\theta_{\max}$  соответственно максимально допустимый абсолютный и относительный углы поворота для конкретного материала.

#### 4.4.7. Расчеты на прочность и жесткость

Как было отмечено выше (см. параграф 4.2.6), на основе условий прочности и жесткости могут решаться три типа задач: проверочный расчет, проектный расчет и расчет максимально допустимых нагрузок.

Рассмотрим пример проектного расчета.

**Пример.** Определить диаметр вала постоянного поперечного сечения (см. рис. 4.23,а).

Дано:  $[\tau]$  70МПа;  $[\theta]$  2град/м;  $M_2$  2,5кН м;  $M_3$  1,5кН м;  $M_3$  1кН м;  $a$  0,1м;  $b$  0,2м;  $G$  8 10<sup>4</sup> МПа.

Определить диаметр вала из условия прочности и условия жест-



кости, взяв за проектное значение диаметра его наибольшую величину.

*Решение.* Запишем условие прочности для наиболее нагруженного сечения, положение которого найдем из эпюры крутящих моментов.

Порядок построения эпюры  $M_x$  представлен в параграфе 4.4.1, согласно которому начинаем с определения всех внешних моментов. Для этого используем уравнение равновесия — сумму внешних моментов относительно оси  $x$ :

$$m_x \quad M_A \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad 0,$$

из которого

находим  $M_A \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad 3 \text{ кН м.}$

Далее выделяем силовые участки  $AB$ ,  $BC$ ,  $CK$ ,  $KL$  и, используя метод сечений, для каждого участка записываем выражения внутреннего момента  $M_x$ .

Участок  $AB$   $0 \leq x_1 \leq a$ :

$$M_{x_1} = M_A = 3 \text{ кН м.}$$

Участок  $BC$   $0 \leq x_2 \leq b$ , начало координат переносим в начало участка:

$$M_{x_2} = M_A - M_1 = 0,5 \text{ кН м.}$$

Участок  $CK$   $0 \leq x_3 \leq b$ :

$$M_{x_3} = M_A - M_1 - M_2 = 1 \text{ кН м.}$$

На участке  $KL$  внутренний момент равен нулю.

На основе полученных выражений для  $M_x$  строим эпюру (см. рис. 4.23,б), из которой видно, что наиболее нагруженными будут сечения на участке  $AB$ .

Следовательно, расчетный момент  $M_{\text{рас}} = 3 \text{ кН м}$ , тогда минимальное значение диаметра вала, удовлетворяющее условию прочности (4.41), будет равно

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{рас}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0,06 \text{ м.}$$

Второе значение диаметра  $d_2$ , определим из условия жесткости, ко-

торое необходимо записать для наиболее деформируемого участка вала.

Положение такого участка наглядно отразится на эпюре углов поворота, хотя для вала, имеющего по всей длине постоянный диаметр, данный участок будет соответствовать части стержня с наибольшим

внутренним крутящим моментом.

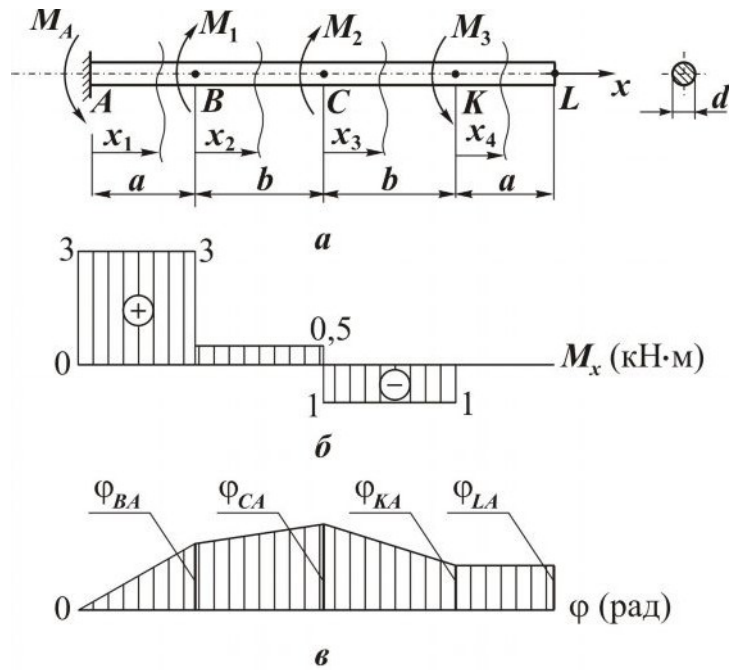


Рис. 4.23

Для наглядности построим эпюру углов поворота сечений.

Участками будут части стержня, для которых внутренний крутящий момент, полярный момент инерции и модуль сдвига постоянны. Для заданной схемы – это  $AB, BC, CK, KL$ .

Участок  $AB$   $0 \leq x_1 \leq a$ .

Угол поворота сечения  $x_1$  относительно сечения  $A$

$$\varphi_{x_1 A} = \frac{M_{x_1} x_1}{G I} \quad (4.48)$$

Из выражения (4.48) видно, что угол поворота на участке  $AB$  изменяется по линейному закону, то есть для построения эпюры достаточно рассчитать значение  $\varphi_{x_1 A}$  в начале и в конце участка:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1 A}(x_1=0) &= \frac{3 \cdot 0}{8 \cdot 10^7 I} = 0; \\ \varphi_{x_1 A}(x_1=a) &= \frac{3 \cdot 0,1}{8 \cdot 10^7 I} = \frac{0,375}{10^8 I}. \end{aligned}$$

$\varphi_{BA}$  – угол поворота сечения  $B$  относительно  $A$ .

Участок  $BC$   $0 \leq x_2 \leq b$ .

Угол поворота сечения



$$x_2 A(x_2, b)_{BA} = \frac{M_{x_2} b}{G I_{CA}} = \frac{0,375}{10^8 I} - \frac{0,5}{8 \cdot 10^7 I} - \frac{0,2}{10^8 I} + \frac{0,5}{10^8 I}$$

Участок СК 0  $x_3$   $b$  :

$$x_3 A(x_3, b)_{CA} = \frac{M_{x_3} b}{G I_{KA}} = \frac{0,5}{10^8 I} - \frac{1}{8 \cdot 10^7} - \frac{0,2}{10^8 I} + \frac{0,25}{10^8 I}$$

Участок KL 0  $x_4$   $a$  :

$$x_4 A(x_4, a)_{KA} = \frac{M_{x_4} a}{G I_{KA}} = \frac{0,25}{10^8 I} - 0 - \frac{0,25}{10^8 I}$$

По полученным значениям для  $\theta_{BA}$  строим эпюру (см. рис. 4.23,в), из которой видно, что наибольший относительный угол поворота  $\theta_{BA}$  будет на участке АВ:

$$\theta_{BA} = \frac{0,375}{10^8 I} \cdot a$$

Поэтому условие жесткости запишем для этого участка как

$$\theta_{BA} \leq [\theta]. \quad (4.49)$$

Размерность  $\theta_{BA}$  - рад а  $[\theta]$  град. Приведем  $[\theta]$  к той же размерности.

$$[\theta] = \frac{\pi}{180} \cdot 0,0349 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$$

тогда условие (4.49) запишется как

$$\frac{0,375}{10^7 I} \leq 0,0349, \quad (4.50)$$

учитывая, что  $I = \frac{d^4}{32}$  из выражения (4.50), определяем  $d_2$  :

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{0,375}{10^7 \cdot 3,14}} = 0,057 \text{ м.}$$

Окончательно принят диаметр вала  $d_1 = 0,06$  м, полученный

по условию прочности, так как он больше.

## 4.5. Изгиб

Рассмотрим плоский поперечный *изгиб*. Это такой вид нагружения, когда под действием внешних нагрузок из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня могут возникнуть только два изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q_y$  или изгибающий момент  $M_y$  и поперечная сила  $Q_z$ .

*Изгиб называют чистым, если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент.* Стержень, работающий на изгиб, называют *балкой*.

### 4.5.1. Эпюры внутренних силовых факторов

Для определения положения наиболее нагруженного сечения стержня при изгибе, как и при других видах нагружения, необходимо иметь эпюры внутренних силовых факторов. Рассмотрим балку на двух опорах (см. рис. 4.24,а), нагруженную сосредоточенной внешней силой (активной)  $F$ . Собственный вес балки учитывать не будем.

Согласно порядку построения эпюры (см. параграф 4.2.1) прежде всего необходимо определить все внешние нагрузки, действующие на стержень.

В сечении  $A$  расположена шарнирно-неподвижная опора, создающая в общем случае нагружения две реактивных составляющих  $R_A$  и  $H_A$ , а в сечении  $B$  имеем шарнирно-подвижную опору, которая создает одну реактивную составляющую  $R_B$ . Отмеченные опорные реакции определим из уравнений равновесия балки:

$$\begin{aligned} X \quad H_A \quad 0; \\ m_A \quad F \quad a \quad R_B \quad a \quad b \quad 0; \\ Y \quad R_A \quad F \quad R_B \quad 0. \end{aligned}$$

Решая данные уравнения совместно, получаем

$$H_A=0; \quad R_B = \frac{F \cdot a}{a+b}; \quad R_A = \frac{F \cdot b}{a+b}.$$

Для проверки правильности определения реакций необходимо записать еще одно уравнение равновесия, например

$$m_{\epsilon} \quad R_A(a+b) \quad F \cdot b \quad 0,$$

и, подставив в него найденные значения реакций, убедиться в его выполнении.

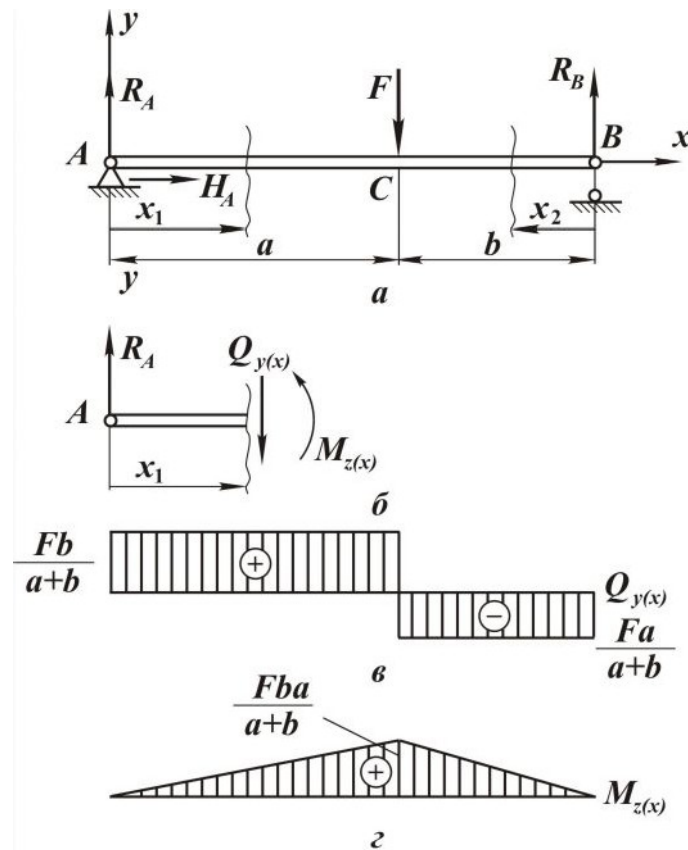


Рис. 4.24

Следующим этапом построения эпюры является выделение силовых участков (понятие участка приведено в параграфе 4.2.1).

Для исследуемого стержня имеем два силовых участка: AC, CB. Далее, используя метод сечений (см. параграф 4.1.2.), на каждом участке записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов.

На участке AC  $0 < x_1 < a$  рассмотрим равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной  $x_1$ . Эта часть стержня нагружена внешней сосредоточенной силой  $R_A$ , которую должна уравновесить внутренняя поперечная сила  $Q_{y(x)}$ . Если на рассматриваемую часть стержня действует несколько внешних сил, то внутренняя сила  $Q_{y(x_1)}$  будет равна сумме их проекций на ось  $y$ .

Следовательно,

$$Q_{y(x_1)} = R_A - \frac{F}{a} x_1 \quad (4.51)$$

Примем следующее *правило знаков* для внутренней поперечной силы. Если внешняя сила направлена таким образом, что стремится повернуть рассматриваемую часть стержня относительно сечения по часовой стрелке, то она создает по-



ложительную внутреннюю силу  $Q_y(x)$  (рис. 4.25).

x)

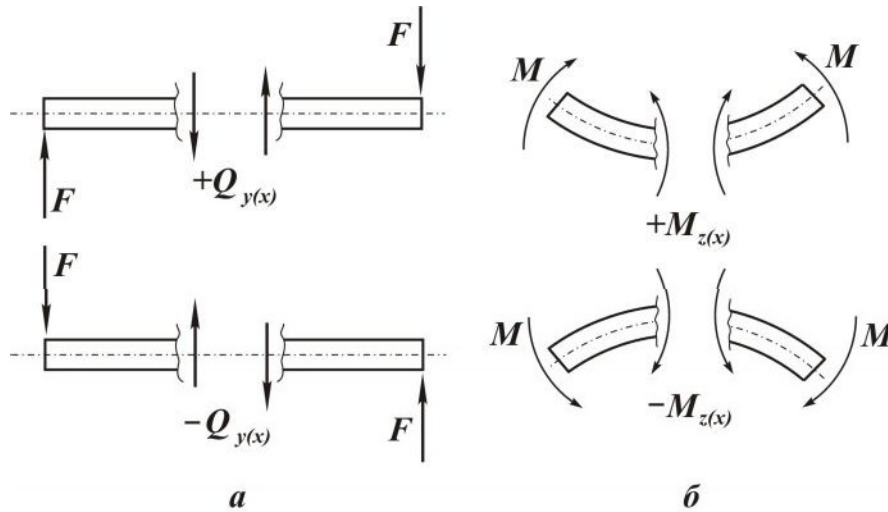


Рис. 4.25

Согласно правилу знаков внешняя сила  $R_A$  в сечении  $x_1$  создает положительную внутреннюю силу (см. рис. 4.24,б). Однако рассматриваемая часть стержня длиной  $x_1$  под действием  $R_A$  и  $Q_y(x_1)$  в равновесии не находится, так как эти силы создают момент, равный

$$M_{z(x)} = R_A \cdot x_1.$$

Следовательно, в сечении  $x_1$  должен возникать внутренний момент  $M_{z(x)}$ , уравновешивающий момент от силы  $R_A$ .

x

Таким образом, если на рассматриваемую часть действует несколько внешних нагрузок, то изгибающий момент  $M_{z(x)}$  в сечении стержня равен сумме моментов от внешних нагрузок, взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения, то есть момент в сечении  $x_1$  будет равен

$$M_{z(x_1)} = R_A \cdot x_1 + \frac{F \cdot b}{a} \cdot x_1. \quad (4.52)$$

Рассмотрим *правило знаков* для внутреннего момента. Если внешние нагрузки деформируют рассматриваемую часть стержня, мысленно закрепленную в сечении, выпуклостью вниз,

то они создают положительный момент  $M_{z(x)}$  (см. рис. 4.25).

В соответствии с данным правилом внешняя сила  $R_A$  в сечении  $x_1$  создает положительный внутренний момент (см. рис. 4.24,б), который

согласно выражению (4.52) линейно зависит от  $x_1$ . Поэтому, чтобы построить эпюру моментов *на участке AC*, необходимо знать значение момента в начале участка и в конце:

$$M_{z(x_1=0)} = 0;$$

$$M_{z(x_1 a)} = \frac{F b}{a b} a.$$

Для участка  $CB$  удобнее начало координат перенести в сечение  $B$  и рассмотреть равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной  $x_2$  (см. рис. 4.24,а). Тогда для  $BC$  ( $0 < x_2 < b$ )

$$Q_{y(x_2)} = R_B - \frac{F a}{a b}; \quad (4.53)$$

$$M_{z(x_2)} = R_B x_2 - \frac{F a}{a b} x_2. \quad (4.54)$$

Согласно выражениям (4.53) и (4.54) внутренняя поперечная сила на участке  $BC$  постоянная и отрицательная, а момент положительный и изменяется по линейному закону.

В начале участка

$$M_{z(x_2 0)} = 0,$$

в конце –

$$M_{z(x_2 b)} = \frac{F a}{a b} b.$$

По полученным выражениям для внутренних силовых факторов строим эпюру  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$  (см. рис. 4.24,з).

На эпюре  $Q_y(x)$  в сечении, где приложена сосредоточенная внешняя сила, будет скачок на величину этой силы, а на эпюре  $M_z(x)$  излом. Скачок на эпюре  $M_z(x)$  будет иметь место в том сечении, в котором приложен сосредоточенный внешний момент, причем величина скачка равна соответствующему моменту.

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (см. рис. 4.26).

Опорные реакции для данного примера могут быть определены и без записи условий равновесия, так как система симметрична, значит каждая опора берет на себя половину активной нагрузки:

$R_A = R_B = \frac{q l}{2}$ . Балка имеет один силовой участок  $AB$  ( $0 < x < l$ ). Начало координат расположим в опоре  $A$ .

Мысленно сделаем сечение на расстоянии  $x$  от опоры  $A$  и рассмотрим равновесие этой части стержня.

При этом получим

$$Q_{y(x)} = R_A - qx - \frac{ql}{2} qx; \quad (4.55)$$

$$M_{z(x)} = R_A x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}. \quad (4.56)$$

Уравнение (4.55) является уравнением прямой линии, для построения которой достаточно два значения:

$$Q_{y(x=0)} = \frac{ql}{2}; \quad Q_{y(x=l)} = -\frac{ql}{2}$$

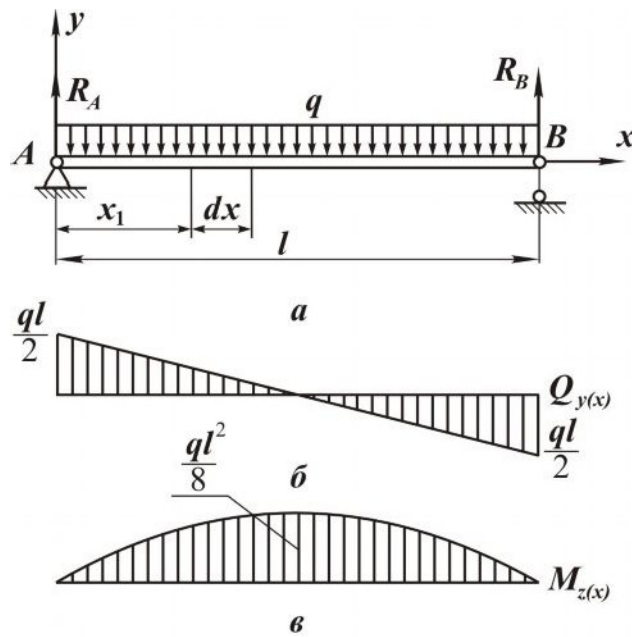


Рис. 4.26

Эпюра поперечных сил представлена на рис. 4.26,б.

Уравнение (4.56) соответствует параболе.

Для ее построения необходимо знать положение экстремума и его значение. Положение экстремума функции  $M_{z(x)}$  определим, приравняв

ее первую производную

$$\frac{dM_{z(x)}}{dx} \text{ к нулю:}$$

$$\frac{dM_{z(x)}}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0. \quad (4.57)$$

Тогда из (4.57) можно найти значение координаты  $x_0 = \frac{l}{2}$ , при котором изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_{z(x-x_0)} = \frac{1}{8}.$$

Кроме того, найдем значение момента в начале и в конце участка:

$$M_{z(x_0)} = 0; M_{z(x_l)} = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 4.26,в.

Сопоставляя эпюры  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$ , делаем вывод, что при действии распределенной нагрузки поперечная сила на участке изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по параболическому, причем выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке. Соответственно, в том сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент принимает экстремальное значение – значит, между выражениями для поперечной силы и изгибающего момента существует *дифференциальная зависимость*.

Рассмотрим это подробнее. Для этого мысленно вырежем из стержня (см. рис. 4.26,а) элемент длиной  $dx$  (рис. 4.27). Тогда в левом сечении будут действовать силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ , а в правом  $Q_y + dQ_y$  и  $M_z + dM_z$ .

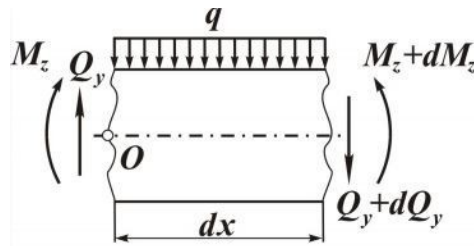


Рис. 4.27

Составим условие равновесия выделенного элемента:

$$M_z - (M_z + dM_z) + Q_y - (Q_y + dQ_y) + q dx - \frac{q dx^2}{2} = 0.$$

Пренебрегая произведениями  $dQ_y dx$  и  $q dx \frac{dx}{2}$  как величинами

второго порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми, получаем

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y. \quad (4.58)$$

Дифференциальная зависимость (4.58) используется для определения положения экстремума на эпюре изгибающих моментов, что и было проиллюстрировано выше (выражение 4.57).

#### 4.5.2. Геометрические характеристики плоских сечений

В расчетах на прочность и жесткость геометрические характеристики используются при любом виде нагружения. Так, при растяжении (сжатии) и сдвиге (срезе), определяя напряжение или перемещение, не-

обходимо знать площадь поперечного сечения  $A$ . Форма площади сечения при данных видах нагружения значения не имеет, так как напряже-



ния равномерно распределяются по сечению. При кручении напряжения распределяются по сечению неравномерно, поэтому мы имеем дело с такими геометрическими характеристиками, как полярный момент инерции  $I_p$  и полярный момент сопротивления  $W_p$ .

Рассмотрим геометрические характеристики поперечных сечений стержня, которые используются при изгибе.

**Статические моменты сечения.** Статическим моментом площади сечения относительно оси  $z$ , взятой в той же плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  сечения на их расстояние до оси (рис. 4.28). Эта сумма распространяется на всю площадь сечения  $A$ .

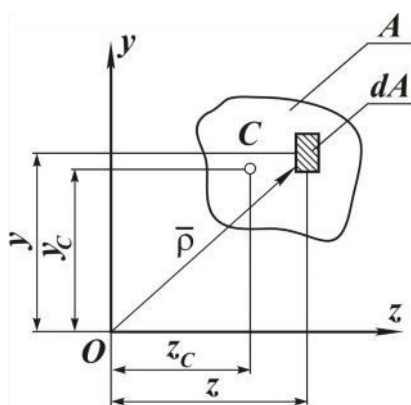


Рис. 4.28

Статические моменты сечения относительно осей  $z$  и  $y$  равны соответственно

$$S_z = \int_A y dA; \quad (4.59)$$

$$S_y = \int_A z dA;$$

или

$$\begin{aligned} S_z &= y_C A; \\ S_y &= z_C A. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Здесь  $y_C, z_C$  — координаты центра тяжести сечения.

Из выражений (4.59) и (4.60) следует, что статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю, а статический момент площади сложной формы можно представить алгебраической суммой статических моментов составляющих ее площадей:

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_{i=1}^n S_{z_i} = \sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i; \\ S_y &= \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n z_{c_i} A_i, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где  $y_{c_i}, z_{c_i}, A_i$  — соответственно координаты центра тяжести и площадь  $i$ -й части сечения,  $n$  — число частей, составляющих площадь  $A$ .

С учетом зависимостей (4.60) и (4.61) получим выражения для определения положения центра тяжести сечения относительно координатных осей, если известны статические моменты частей данной площади относительно этих же осей:

$$\frac{\sum_{i=1}^n z_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i};$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$
(4.62)

**Пример**

Определить координаты центра тяжести сечения, имеющего сложную форму (рис. 4.29,а).

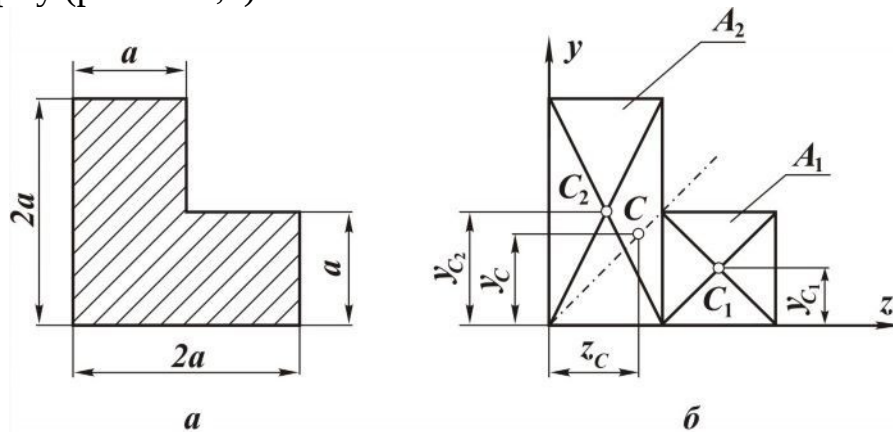


Рис. 4.29

*Решение.* Задаем положение координатных осей  $Oz, Oy$ . Сечение имеет одну ось симметрии, следовательно, для выбранного положения осей  $y_c, z_c$ .

Разобьем сечение на две части (рис.4.29,б), которые имеют площади:

$$A_1 = a^2;$$

$$A_2 = 2a^2$$

и координаты своих центров тяжести  $y_{c_1} = \frac{a}{2}; y_{c_2} = a$ , тогда, с учетом выражений (4.62),

$$y_c = \frac{y_{c_1} A_1 + y_{c_2} A_2}{A_1 + A_2} = 0,83a$$

**Моменты инерции сечений.** Различают осевые, полярные и центробежные моменты инерции сечений.

*Осевым моментом инерции площади сечения* относительно какой-либо оси, лежащей в его плоскости, называется сумма произведе-

ний элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси

(см. рис. 4.28):

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad (4.63)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA.$$

*Полярным моментом инерции площади сечения* относительно полюса  $O$  (см. рис. 4.28), взятого в начале осей координат, называется интеграл следующего вида:

$$I = \int_A (z^2 + y^2) dA, \quad (4.64)$$

где  $I^2 = I_y^2 + I_z^2$ , тогда

$$I = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z. \quad (4.65)$$

Таким образом, полярный момент равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей с началом координат в полюсе  $O$ .

*Центробежным моментом инерции площади сечения* называется сумма произведений элементарных площадок на их расстояние до обеих координатных осей, распространенная на всю площадь сечения:

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (4.66)$$

В отличие от осевого и полярного моментов инерции центробежный момент может быть отрицательным и равным нулю.

**Моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей.** Значения моментов инерции зависят от положения сечения по отношению к осям координат.

Пусть оси  $u$  и  $Z$  являются центральными осями сечения, относительно которых известны моменты инерции.

Определим моменты инерции относительно осей  $u_1$  и  $Z_1$ , параллельно отстоящих от центральных на расстоянии  $a$  и  $b$  соответственно (см. рис. 4.30). Тогда  $u_1 = u + b$ ,  $Z_1 = Z + a$ , при этом

$$I_{z_1} = \int_A (y + b)^2 dA = I_z + 2bS_y + b^2 A.$$

Так как оси  $u$  и  $Z$  являются центральными, то статические моменты  $S_y$  и  $S_z$  будут равны нулю.

$u$

С учетом этого

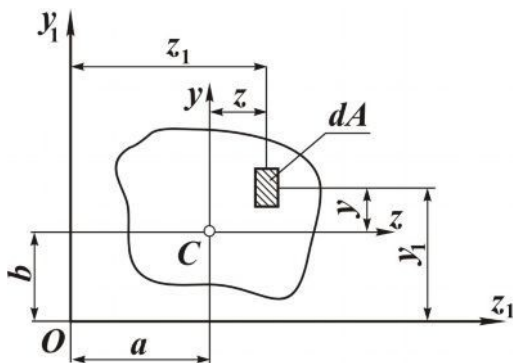


Рис. 4.30

$$\begin{aligned}
 I_{z_1} &= I_z + b^2 A; \\
 I_{y_1} &= I_y + a^2 A; \\
 I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + abA.
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

Зависимости (4.67) используют для вычисления моментов инерции сечений сложной формы. Используя свойства определенного интеграла, момент инерции сложного сечения находят как сумму моментов инерции составных частей этого сечения, то есть

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}, \tag{4.68}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  номера частей, на которые мысленно разделено сложное сечение.

**Моменты инерции сечения при повороте осей координат.** Найдем зависимость между моментами инерции сечения относительно осей  $z, y$  и моментами инерции сечения относительно осей  $v, u$ , повернутых на угол  $\alpha$  (рис. 4.31).

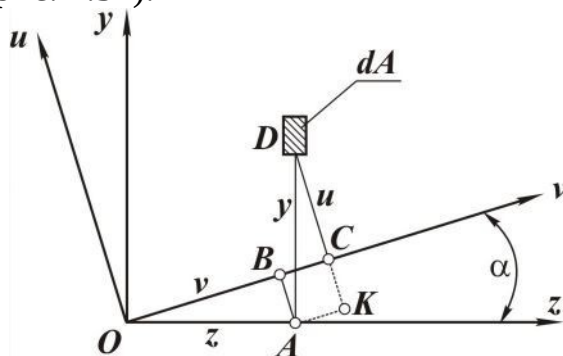


Рис. 4.31

Выразим координаты элементарной площадки  $dA$  в новой системе координат через старые координаты:

$$\begin{aligned}
 v &= OB + BC = z \cos \alpha + y \sin \alpha, \\
 u &= DK = AB = y \cos \alpha - z \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 I_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA; \\
 I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA;
 \end{aligned}$$

$$I_{vu} = \int_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)(y \cos \alpha + z \sin \alpha) dA.$$

После преобразования получаем:

$$\begin{aligned} I_v &= I_z \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha; \\ I_u &= I_z \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha; \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$I_{vu} = I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha.$$

Из первых двух уравнений (4.69) получаем

$$I_v + I_u = I_z + I_y = \text{const.}$$

Из формул (4.69) видно, что значения осевых моментов инерции зависят от угла  $\alpha$ , но сумма их неизменна. Следовательно, можно найти такое значение угла  $\alpha$ , при котором один из моментов инерции принимает максимальное значение, а другой — минимальное. Дифференцируя выражение  $I_v$  по  $\alpha$  и приравнявая производную нулю, получаем

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (4.70)$$

Из третьего соотношения в равенствах (2.69) несложно установить, что  $I_{zy} = 0$  — центробежный момент инерции равен нулю, при

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называют *главными осями*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то их называют *главными центральными осями*, а соответствующие им осевые моменты инерции — *главными центральными моментами инерции*, выражения которых можно получить из первых двух соотношений в равенствах (4.69), исключив угол  $\alpha$ .

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{zy}^2}.$$

Знак плюс соответствует максимальному моменту инерции, знак минус — минимальному. Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось будет являться *главной центральной осью*, другая главная центральная ось будет перпендикулярна оси симметрии и пройдет через центр тяжести сечения.

**Моменты инерции сечений простой формы.** Рассмотрим сече-

ния прямоугольной и круглой формы.

*Прямоугольник.* Определим момент инерции прямоугольника высотой  $h$  и шириной основания  $b$  относительно главных центральных

осей  $O_z$  и  $O_y$  (рис. 4.32).

Элементарную площадь  $dA$  можно выразить  $dA = b \, dy$ . Тогда как

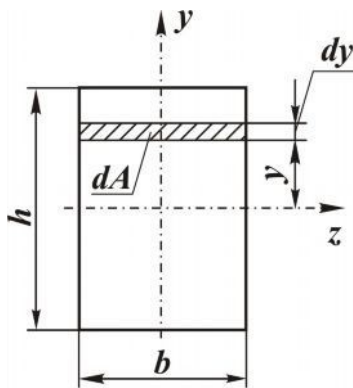


Рис. 4.32

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = \frac{bh^3}{12} \quad (4.71)$$

По аналогии найдем  $I_y = \frac{hb^3}{12}$ .

**Круг.** Для круга ранее был определен полярный момент инерции (см. параграф 4.4.4). Учитывая, что

$$I = I_y + I_z, \quad I_z = I_y = \frac{I}{2} = \frac{d^4}{64}. \quad (4.72)$$

### 4.5.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении возникают два силовых фактора: изгибающий момент, поперечная сила.

Естественно предположить, что сосредоточенная поперечная сила, лежащая в сечении, представлена в распределенном виде касательными напряжениями, а сосредоточенный изгибающий момент — нормальными напряжениями.

Определим закон нормальных напряжений в поперечном сечении, рассмотрев случай чистого изгиба (в поперечном сечении возникает только изгибающий момент).

Так как в любом сечении стержня действует одинаковый изгибающий момент, то изменение кривизны однородного стержня по всей длине будет одним и тем же. Это легко обнаруживается, если на боковую поверхность стержня нанести сетку из продольных и поперечных прямых линий (см. рис. 4.33).

После нагружения продольные линии и ось стержня примут форму дуг окружностей с радиусом  $\rho$ , а поперечные линии останутся прямыми. Следовательно, как и при растяжении, плоские поперечные сечения стержня до деформации останутся плоскими и после деформации.

Чистый изгиб стержня характеризуется также и тем, что его волокна на выпуклой стороне растягиваются, а на вогнутой стороне сжимаются. Очевидно, что существует слой, в котором изменение длины отсутствует.



Этот слой называют нейтральным слоем (см. рис. 4.33). Линию пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называют *нейтральной линией*.

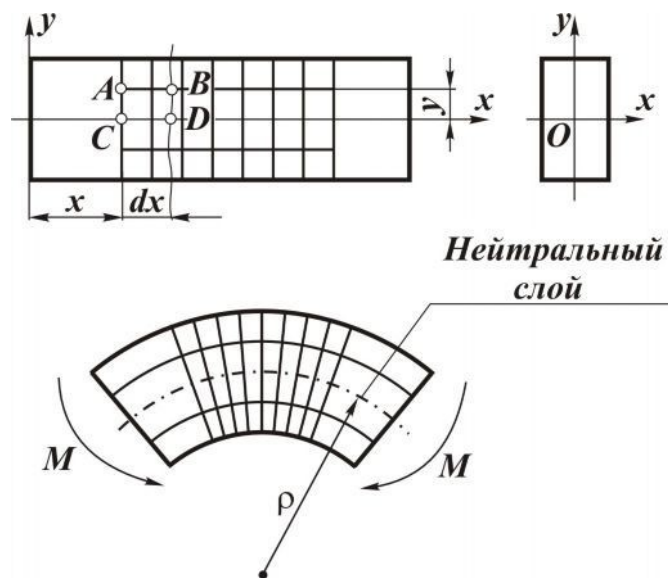


Рис. 4.33

Если предположить, что слои, параллельные нейтральному, друг на друга не давят, то каждый слой будет находиться в условиях растяжения (сжатия). Тогда для определения напряжений в поперечном сечении можно использовать закон Гука:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x. \quad (4.73)$$

Однако деформация волокон по высоте сечения будет различной: чем волокно дальше отстоит от нейтрального слоя, тем будет больше его деформация (рис. 4.33). Следовательно, напряжения по сечению распределяются неравномерно. Рассмотрим это подробнее.

Выделим в стержне элемент длиной  $dx$  (рис. 4.34) и исследуем его деформированное состояние после приложения момента.

Поперечные сечения стержня, отстоящие на расстоянии  $dx$ , после нагружения повернутся на взаимный угол  $d\Theta$  (рис. 4.34).

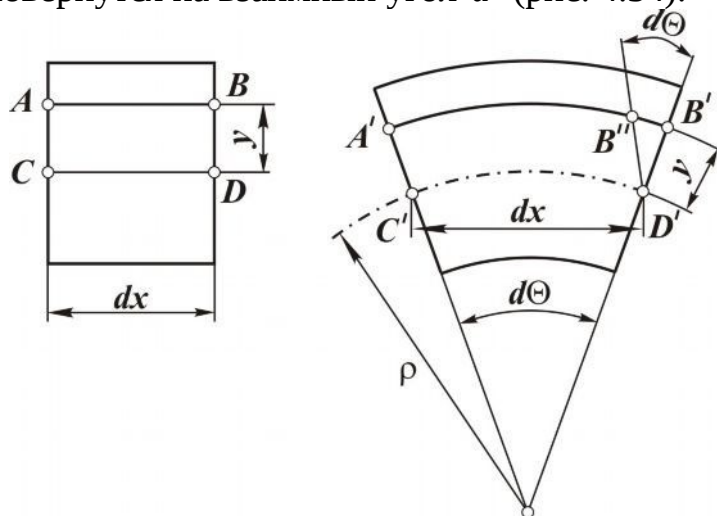


Рис. 4.34

При этом относительное удлинение (деформация) волокна  $AB$ ,

расположенного от нейтрального слоя на расстоянии  $y$ , можно определить как

$$\frac{AB}{AB} = \frac{B - B}{AB} \quad (4.74)$$

Учитывая, что нейтральный слой не растягивается и не сжимается, то  $AB = C D$ , а из треугольников  $K C D$  и  $D B B$  получаем

$$C D = d, \quad B B = y d,$$

тогда

$$\frac{AB}{x} = \frac{y}{-} \quad (4.75)$$

Для расчета напряжений по формуле (4.73), с учетом (4.75), необходимо знать радиус кривизны :

$$\frac{E y}{x} \quad (4.76)$$

С этой целью рассмотрим равновесие элемента длиной  $x$  (рис. 4.35).

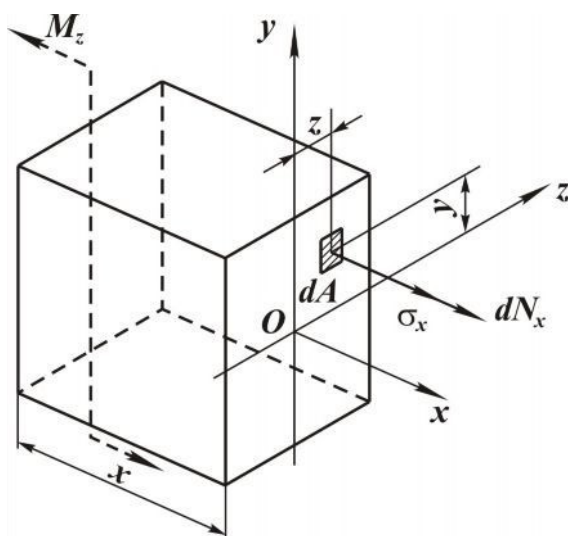


Рис. 4.35

Условия равновесия для выделенного элемента будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X & \frac{dN_x}{A} = 0; \\ Y & = 0 = 0; \\ Z & = 0 = 0; \\ m_x & = 0 = 0; \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$m_y = \frac{dN_x}{A} z = 0;$$

$$m_z = \frac{dN_x}{A} y - M_z = 0,$$

где  $dN_x$  — элементарная продольная сила, действующая на площадке  $dA$ :

$$dN_x = x dA \frac{E y}{-} \quad (4.78)$$

Подставив выражение (4.78) в первое условие равновесия, получим

$$\frac{E y}{A} y dA = 0.$$

Так как отношение  $\frac{E}{-}$  не равно нулю и не зависит от переменной

интегрирования, то, вынося его за знак интеграла и сокращая, будем

иметь

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой *статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси Oz*.

Если он равен нулю, то нейтральная ось при изгибе прямого стержня проходит через центр тяжести сечения.

Подставив выражение (4.78) в пятое условие равновесия, получим

$$\int_A \frac{E}{y} z dA = 0$$

или

$$\int_A y z dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой *центробежный момент инерции площади поперечного сечения относительно осей Oz и Oy*.

Так как он равен нулю, то эти оси являются главными центральными осями инерции.

Из шестого условия равновесия после аналогичного преобразования получаем выражение для *момента внутренних сил относительно нейтральной оси*:

$$M_z = \int_A \frac{E}{y^2} dA = \int_A \frac{E}{y^2} dA. \quad (4.79)$$

Интеграл

$$\int_A y^2 dA = I_z \quad (4.80)$$

является моментом инерции поперечного сечения стержня относительно оси Oz, которая представляет собой нейтральную линию и главную центральную ось сечения.

Тогда выражение (4.79) приобретает вид

$$M_z = \frac{EI_z}{y},$$

откуда кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{y} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (4.81)$$

Подставив соотношение (4.81) в формулу (4.76), получим аналитическое выражение закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (4.82)$$

Из выражения (4.82) и предшествующих результатов изучения изгиба следует ряд выводов:

- центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений;
- нейтральная линия совпадает с главной центральной осью сечения;
- напряжения зависят от значений внутреннего изгибающего момента  $M_z$ , момента инерции сечения относительно нейтральной оси  $I_z$  и расстояния  $y$  от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение;
- напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой, то есть по ширине сечения напряжения не изменяются;
- по высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону, и максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

В соответствии с выражением (4.82) построим эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении (рис. 4.36).

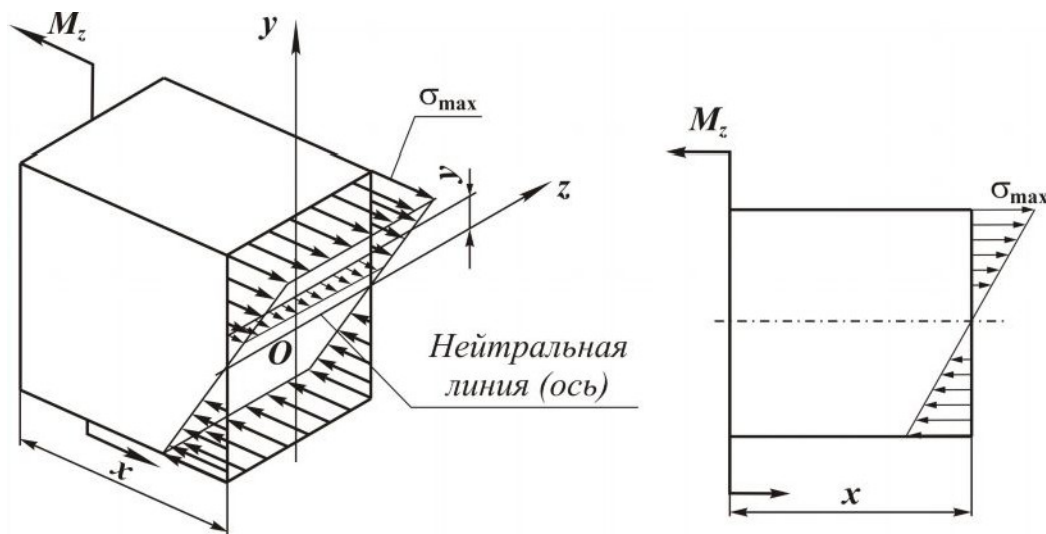


Рис. 4.36

Из эпюры (рис. 4.36) видно, что внутренние слои материала, особенно вблизи нейтральной линии, мало напряжены.

Поэтому для экономии материала площадь сечения необходимо распределять подальше от нейтральной линии, то есть использовать сечения с возможно большими моментами инерции относительно нейтральной оси (см. рис. 4.37).

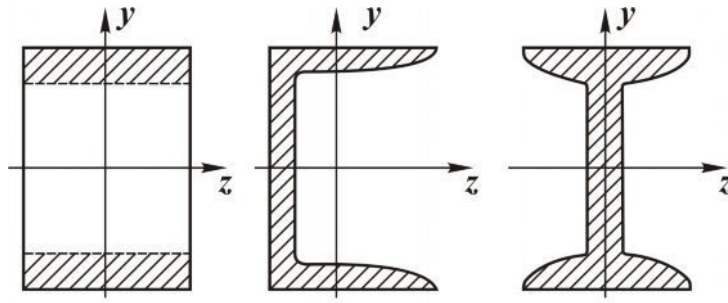


Рис. 4.37

#### 4.5.4. Условие прочности

Максимальные напряжения, согласно формуле (4.82), будут возникать в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения ( $y = y_{\max}$ ):

$$\max \frac{M_z}{I_z} y_{\max}$$

или

$$\max \frac{M_z}{W_z} \tag{4.83}$$

где  $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$  - осевой момент сопротивления сечения стержня.

Для прямоугольного сечения (см. рис. 4.32)

$$W_z = \frac{b h^2}{6},$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6}. \tag{4.84}$$

Для круглого сечения, с учетом выражения (4.72),

$$W_z = W_y = \frac{d^3}{32}. \tag{4.85}$$

Условие прочности записывается для максимального напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении балки, положение которого определяется с помощью эпюры изгибающих моментов, и имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq [\sigma], \tag{4.86}$$

здесь  $M_{\text{расч}}$  - расчетный внутренний изгибающий момент (момент в наиболее нагруженном сечении);  $[\sigma]$  - допускаемое нормальное напряжение при изгибе для конкретного материала стержня.

#### 4.5.5. Касательные напряжения в поперечном сечении

В параграфе 4.5.3 было отмечено, что в поперечном сечении стержня при изгибе могут возникать не только нормальные, но и касательные напряжения, если в сечении присутствует поперечная (перерезывающая) сила.

Определим закон изменения касательных напряжений в сечении, рассмотрев поперечный изгиб.

Из балки (рис. 4.38,а) мысленно вырежем элемент длиной  $dx$  (рис. 4.39,а), в поперечных сечениях которого будут действовать: поперечные силы  $Q_y$ ; изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_z + dM_z$ .

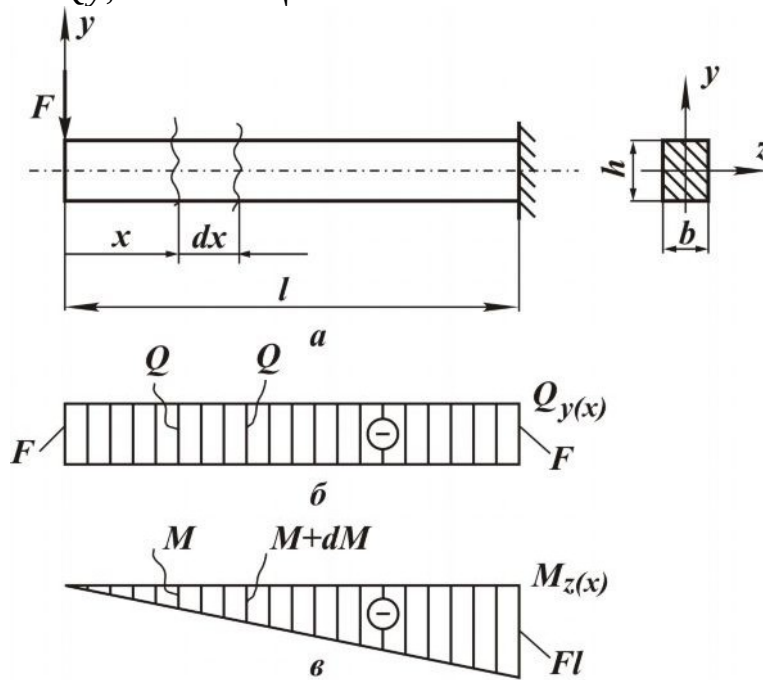


Рис. 4.38

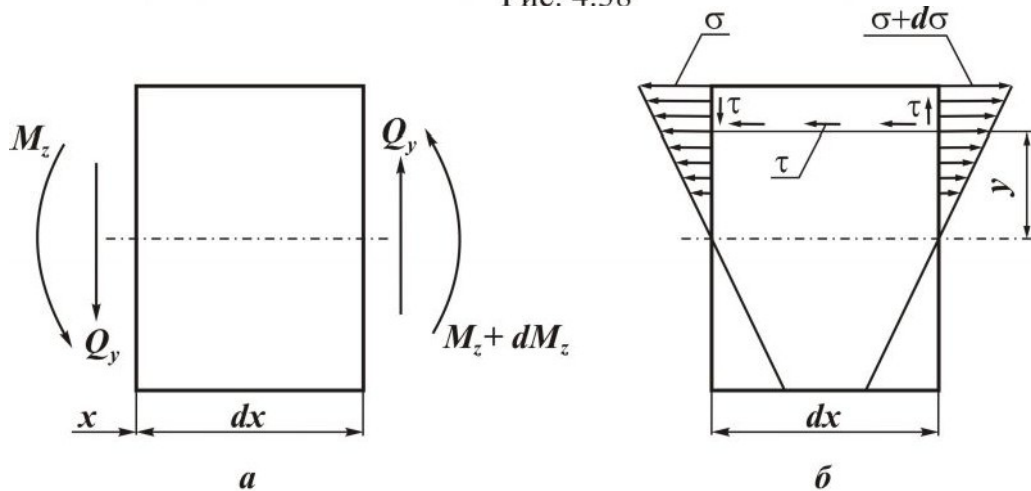


Рис. 4.39



Направления силовых факторов и напряжений приняты в соответствии со схемой нагружения.

Мысленно разделим данный элемент на две части продольным горизонтальным сечением, сделанным на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, и рассмотрим равновесие, например верхней части (см. рис. 4.39,б).

При этом примем ряд допущений:

\* касательные напряжения в поперечном сечении направлены параллельно перерезывающей силе;

\* с позиции равновесия выделенной части элемента (см. параграф 4.3 и рис. 4.15) касательные напряжения возникают также и в продольных сечениях (закон парности касательных напряжений), вызывая сдвиги волокон относительно друг друга;

\* эти сдвиги приводят к искривлению поперечных сечений. Однако для длинных балок (длинной считается балка, у которой отношение ее длины к наибольшему размеру поперечного сечения больше пяти) сдвиги сравнительно невелики, и можно считать, что сечения остаются плоскими и после нагружения. Поэтому нормальные напряжения при поперечном изгибе тоже вычисляются по формуле (4.82);

\* касательные напряжения в любой точке сечения, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии  $Oz$ , равны между собой, то есть по ширине сечения напряжения не изменяются.

С учетом принятых допущений условие равновесия для верхней части выделенного элемента (см. рис. 4.38,а) будет иметь вид

$$X \quad N \quad N \quad dN \quad b \quad dx \quad 0. \quad (4.87)$$

Здесь  $N$  равнодействующая элементарных нормальных сил  $dA$  в левом сечении, распределенных на  $A$  : площади

$$N \quad dA \quad \frac{M_z}{I_z} y_1 dA \quad \frac{M_z}{I_z} y_1 dA,$$

где  $A$  часть площади поперечного сечения, лежащей выше уровня  $y$ ;  $y_1$  текущая координата элементарной площадки  $dA$  (см. рис. 4.40,б).

Учитывая, что интеграл  $\int_A y_1 dA$  представляет собой статический

момент  $S^*$  площади

А  
относите  
льно оси  
 $Oz$ ,  
запишем  
:

$$N = \frac{M_z S}{I_z z}. \quad (4.88)$$

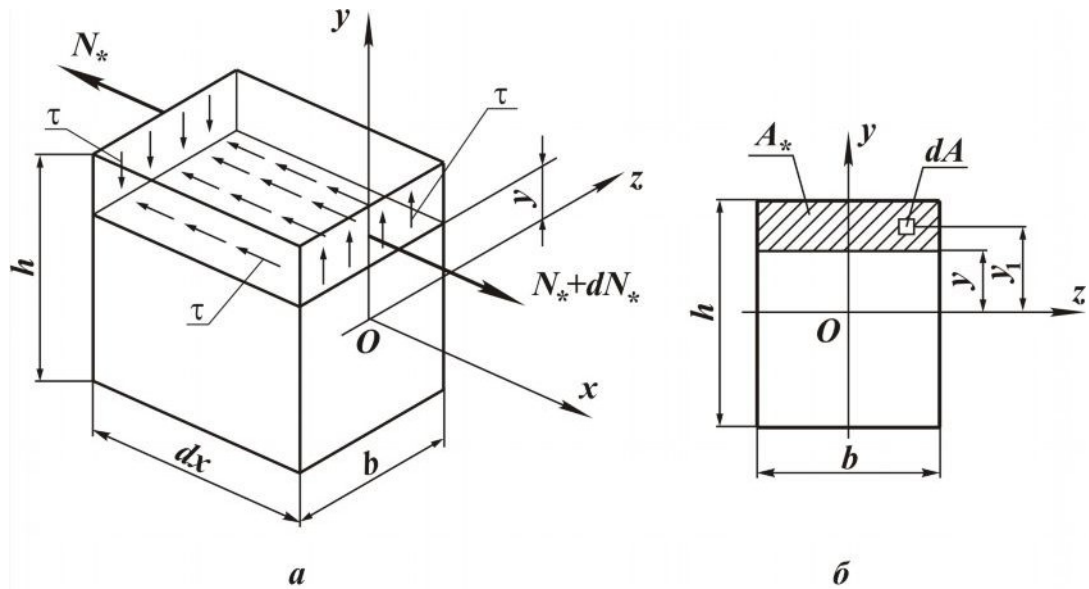


Рис. 4.40

Равнодействующая элементарных нормальных сил в правом сечении будет равна

$$N + dN = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \frac{S_z}{z}. \quad (4.89)$$

Подставляя выражения (4.88) и (4.89) в условие равновесия (4.87), с учетом зависимости (4.58), получаем

$$\frac{dM_z}{dx} \frac{S}{I_z b} = \frac{Q_y}{I_z b} \frac{S}{z}. \quad (4.90)$$

Здесь  $S_z^*$  статический момент части площади поперечного сечения, лежащей в направлении от нейтральной линии за уровнем  $y$ , на котором определяется касательное напряжение;  $b$  ширина поперечного сечения на уровне  $y$ . Парные касательные напряжения в продольных сечениях стержня равны напряжениям в поперечных сечениях на одном и том же уровне  $y$ .

Для прямоугольного поперечного сечения статический момент площади, расположенной за уровнем  $y$ , и осевой момент инерции всего сечения равны соответственно

$$S_z = \frac{b}{2} \frac{h^2}{2} y^2 ;$$

2 4

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Тогда распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения будет соответствовать параболическому закону (рис. 4.41).

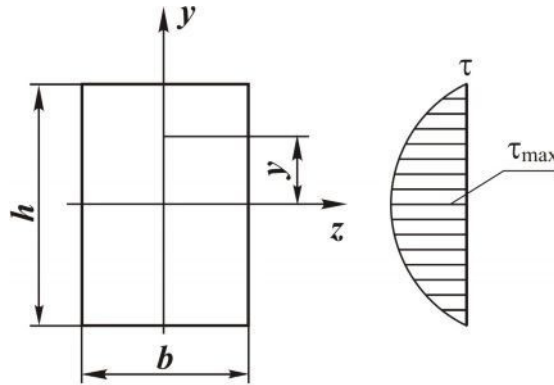


Рис. 4.41

Максимальные касательные напряжения будут действовать на нейтральной линии (при  $y=0$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{2bh}.$$

Условие прочности для касательных напряжений будет иметь вид

$$\tau_{\max} \leq \frac{Q_y S}{I_z b} \leq [\tau], \quad (4.91)$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение для конкретного материала стержня.

В расчетах на прочность касательные напряжения учитываются только для коротких балок, так как в длинных балках нормальные напряжения в поперечных сечениях значительно больше касательных.

#### 4.5.6. Расчеты на прочность

Из трех возможных типов задач (см. параграф 4.2.6.) рассмотрим пример проектного расчета.

**Пример.** Определить размеры поперечного сечения балки (см. рис. 4.40,а), если  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 80$  МПа,  $M = 6$  кН м,  $q = 4$  кН/м,  $h = 2b$ ,  $a = 1$  м.

**Решение.** Заданы  $[\sigma]$  и  $[\tau]$ . Принимаем, что стержень относится к категории длинных балок как наиболее распространенных в технике.

Тогда размеры сечения определим из условия прочности по нормальным напряжениям, а проверочный расчет сделаем по условию прочности для касательных напряжений.

Согласно условию прочности по нормальным напряжениям (4.86), для определения размеров сечения необходимо знать  $M_{расч}$ , значение которого найдем из эпюры изгибающих моментов  $Mz(x)$ .

Правильное построение эпюры  $Mz(x)$ , с учетом зависимости (4.58), контролируется эпюрой поперечных сил  $Qy(x)$ , которая также необходима для проверочного расчета по касательным напряжениям. Следовательно, решение данной задачи необходимо начать с построения эпюр  $Mz(x)$  и  $Qy(x)$ .

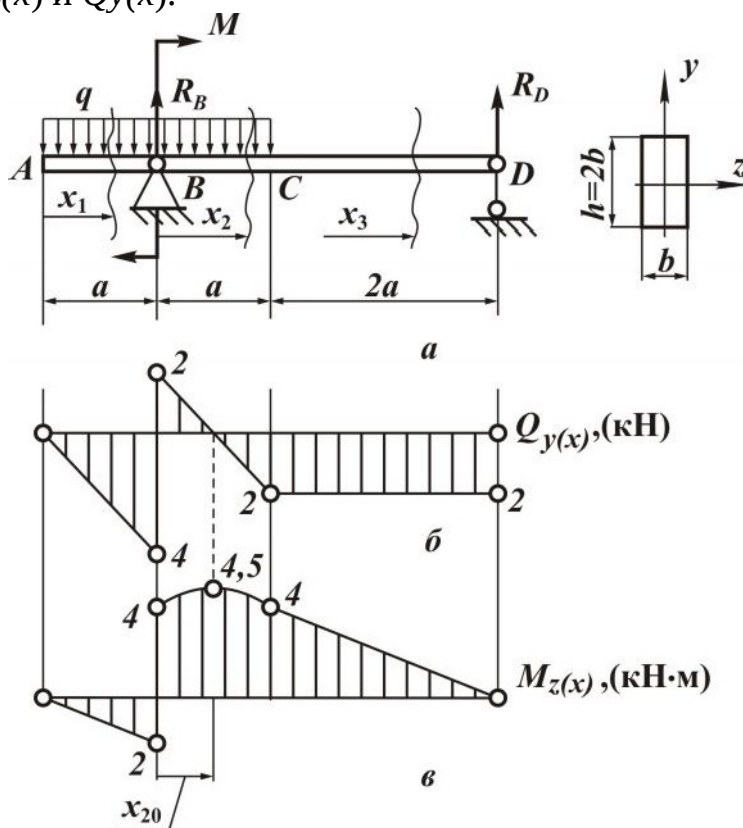


Рис. 4.42

Алгоритм и правила построения эпюр силовых факторов представлены в параграфах 4.2.1 и 4.5.1.

В соответствии с алгоритмом из условий равновесия определим опорные реакции:

$$\begin{aligned}
 m_B & \quad M \quad R_D 3a \quad 0; \\
 R_D & \quad \frac{M}{3a} \quad 2 \quad [\text{кН}]. \\
 m_D & \quad q2a3a \quad M \quad R_B 3a \quad 0;
 \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{q6a^2}{3a} = 6 \text{ [кН]}.$$

Для проверки правильности значений найденных реакций используем еще одно условие равновесия:

$$\sum Y = q2a + R_B - R_D = 4 + 2 - 6 = 0.$$

Условие выполняется, следовательно, реакции найдены правильно.

Балка имеет три силовых участка  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$  (см. рис. 4.40,а). Используя метод сечений, записываем для каждого участка аналитические выражения внутренних силовых факторов.

Участок  $AB$   $0 \leq x_1 \leq a$ :

$$\begin{aligned} Q_{y(x_1)} &= qx_1; \\ Q_{y(x_1=0)} &= 0; \\ Q_{y(x_1=a)} &= qa = 4 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{z(x)} &= q \frac{x^2}{2}; \\ M_{z(x_1=0)} &= 0; \\ M_{z(x_1=a)} &= q \frac{a^2}{2} = 2 \text{ кН м}. \end{aligned}$$

Изгибающий момент на данном участке изменяется по закону квадратной параболы. В сечении  $A$  поперечная сила равна нулю, следовательно, эпюра моментов в этом сечении имеет экстремум.

Участок  $BC$   $0 \leq x_2 \leq a$ . Начало координат в сечении  $B$ :

$$\begin{aligned} Q_{y(x_2)} &= qa - x_2 - R_B; \\ Q_{y(x_2=0)} &= qa - R_B = 2 \text{ кН}; \\ Q_{y(x_2=a)} &= qa - a - R_B = -2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{z(x_2=0)} &= q \frac{a^2}{2} - M = 4 \text{ кН м}; \\ M_{z(x_2=a)} &= q \frac{a^2}{2} - M - R_B a = 4 \text{ кН м}. \end{aligned}$$

2

На данном участке изгибающий момент также изменяется по закону квадратной параболы. С целью определения положения экстремума эпюры моментов выражение для поперечной силы как первой производной функции моментов приравняем к нулю:

$$q \ a \ x_{20} \ R_B \ 0$$



и найдем из этого уравнения координату экстремального значения момента:

$$x_{20} = \frac{qa}{R_B} = 0,5 \text{ [м]}.$$

Тогда экстремальное значение момента будет равно

$$M_{z(x_2 = x_{20})} = qa \cdot x_{20} = M_{R_B x_{20}} = 4,5 \text{ кН м}.$$

Участок  $DC$   $0 < x_3 < 2a$ . Начало координат выгоднее расположить в сечении  $D$ :

$$Q_{y(x_3)} = R_D = 2 \text{ МкН};$$

$$z(x_3) = R_D x_3;$$

$$M_{z(x_3=0)} = 0;$$

$$M_{z(x_3=2a)} = R_D 2a = 4 \text{ кН м}.$$

По полученным выражениям и значениям внутренних силовых факторов строим эпюры поперечных сил (см. рис. 4.42, б) и изгибающих моментов (см. рис. 4.42, в).

Так как балка по всей длине имеет постоянное поперечное сечение, то расчетное значение момента будет равно его максимальной величине на эпюре:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 4,5 \text{ кН м}.$$

Для прямоугольного сечения, согласно формуле (4.84),

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

или (для рассматриваемого случая)

$$W_z = \frac{b^3}{3}.$$

Из условия прочности (4.86)

$$W_z = \frac{M_{\text{расч}}}{[\sigma]}.$$

Тогда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\text{расч}}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4,5}{2 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,035 \text{ м}.$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям (4.91) для полученного значения  $b$ :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh} = 2,45 \text{ МПа} \text{ [}\tau\text{]}.$$

Здесь  $Q_y$  – максимальное значение поперечной силы, взятое из эпюры (см. рис. 4.40,б).

Так как условие прочности выполняется, то значение  $b = 0,035$  м является окончательным.

## 5. ДЕТАЛИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Механические устройства, создаваемые человеком для изучения и использования законов природы, для облегчения своего труда, можно разделить на две большие группы. Первая – устройства, части которых не могут совершать движения одна относительно другой (если не считать незначительных перемещений за счет деформаций элементов). Вторая – устройства, части которых находятся в таком движении.

Устройствами первой группы являются сооружения – здания, мосты, резервуары, трубопроводы, теле-, радиовышки и т. п. К устройствам второй группы относятся механизмы и машины.

В настоящем разделе вводятся основные определения, изучаются устройства и принципы работы механизмов и машин, а также конструктивные особенности деталей машин.

### Понятия и определения

*Механизмом* называют систему подвижно связанных между собой тел, совершающих под действием приложенных к ним сил определенные, заранее заданные движения. Например, части тисков соединены так, что при вращении рукоятки подвижная губка будет перемещаться поступательно.

Тела, составляющие механизм, называют *звеньями* или *детальями механизма*. В любом механизме есть подвижные и неподвижные звенья. Подвижное звено, движение которому сообщается приложением внешних сил, называется *ведущим*. Подвижное звено, воспринимающее движение от ведущего, называется *ведомым*. Например, в тисках рукоятка является ведущим звеном, подвижная губка – ведомым. Неподвижная губка вместе с корпусом образует неподвижное звено (*стойку*).

Иногда механизмы имеют самостоятельное применение, но чаще являются кинематической основой машины. *Машина* – это один или несколько связанных между собой механизмов, предназначенных или для преобразования энергии одного вида в энергию другого (машины-двигатели, машины-генераторы), или для выполнения полезной механической работы (машины-орудия).

*Машины-двигатели и машины-генераторы (или энергетические машины)* – это электрические двигатели, преобразующие электрическую энергию в механическую; двигатели внутреннего сгора-

ния, преобразующие химическую энергию в механическую; гидравлические турбины, преобразующие механическую энергию движущейся воды в механическую энергию вращающего вала турбины; электрические генераторы, преобразующие механическую энергию вращающегося вала в электрическую энергию.

К *машинам-орудиям* относят технологические машины: сельскохозяйственные машины, молоты-прессы, прокатные станы, металлорезающие станки, а также транспортные (конвейеры, насосы, лифты) машины. Технологические машины преобразуют (обрабатывают) материалы, а транспортные их перемещают.

При использовании любых машин целесообразнее использовать быстроходные двигатели (с большей угловой скоростью): у них меньшие габаритные размеры и более высокий коэффициент полезного действия, однако вращающий момент на валу двигателя небольшой. Для выполнения полезной работы угловая скорость вала рабочего (ведомого) механизма, как правило, должна быть значительно ниже скорости вала двигателя, но вращающиеся моменты требуются большие. Так как в большинстве случаев непосредственная связь вала двигателя и вала рабочего механизма невозможна, между ними необходимо расположить механизм для преобразования вращающих моментов и угловых скоростей, который носит название *передачи вращательного движения*.

Механическую энергию многих машин-двигателей обычно определяет энергия ведущего вала. Однако не во всех машинах, машинах-орудиях, например, металлорежущих станках, рабочие органы совершают вращательное движение. В таких случаях применяют *механизмы, преобразующие движение*.

Потребности промышленности предъявляют к современным машинам много требований, главными из которых являются: высокие производительность и коэффициент полезного действия; простота изготовления; удобство и простота обслуживания; надежность; долговечность; безопасность работы; экономичность. С ними непосредственно связаны общие требования, предъявляемые к деталям любой машины:

*прочность* деталь не должна разрушаться под действием на нее внешних сил в течение заданного срока службы;

*жесткость* деформации элементов, возникающие под действием внешних нагрузок не должны превышать некоторых допустимых;

*износостойкость* износ детали не должен влиять на характер сопряжения в течение всего срока службы;

*малый вес и минимальные габариты* деталь должна быть прочна, жестка, обладать износостойкостью при минимально возмож-

ных габаритах и весе;

*стоимость материалов* удовлетворение всех предыдущих требований не должно осуществляться за счет применения дефицитных материалов;

*технологичность* форма и размеры детали должны выбираться таким образом, чтобы изготовление было наиболее простым;

*безопасность* эксплуатация детали должна быть безопасна для обслуживающего персонала;

*соответствие государственным стандартам* деталь должна удовлетворять стандартам, разработанным на форму, размеры, сорта и марки материалов наиболее употребительных деталей.

Выполнение указанных требований обеспечивается в процессе расчета детали.

Различают два вида расчетов: проектный (проектировочный) и проверочный (поверочный).

Проектирование детали можно вести в следующей последовательности:

- составляют расчетную схему, то есть форму деталей и характер сопряжения с другими представляют в упрощенном виде, а внешние (активные и реактивные) силы заменяются сосредоточенными и распределенными;

- определяют нагрузки, действующие на деталь в процессе ее функционирования;

- выбирают материал и назначают допускаемые напряжения;

- из условий прочности, жесткости, долговечности определяют размеры детали и характер ее сопряжения с другими;

- выполняют рабочий чертеж детали с указанием всех сведений, необходимых для ее изготовления;

- при проверочном расчете предварительно задают размеры и форму деталей, исходя из ее назначения, характера сопряжения и общей компоновки узла, а затем определяют фактические напряжения, действительные коэффициенты запаса прочности и сравнивают их с рекомендуемыми.

### **Краткие сведения о стандартизации, взаимозаменяемости деталей машин, допусках и посадках**

*Стандартизацией называется установление обязательных норм, которым должны соответствовать типы, сорта*

*(марки), параметры (в частности, размеры), качественные характеристики, методы испытаний, правила маркировки, упаковки, хранения продукции (сырья, полуфабрикатов изделий).*

Для обеспечения единых норм и технических требований к продукции, обязательных к применению во всех отраслях промышленности, установлены государственные стандарты.

В машиностроении стандартизированы, например:

- обозначения общетехнических величин, правила оформления чертежей, ряды чисел, распространяющиеся на линейные размеры;
- точность и качество поверхности деталей;
- материалы, их химический состав, основные механические свойства и термообработка;
- форма и размеры деталей и узлов наиболее массового применения, например: болтов, гаек, шайб, заклепок, штифтов, приводных ремней и цепей, муфт, подшипников и др.;
- конструктивные элементы большинства деталей машин, например: модули зубчатых и червячных колес, конструктивные формы и размеры шлицевых соединений и т. п.

Кроме государственной стандартизации, существует также ведомственная, которая проводится в пределах одной отрасли или даже одного завода.

Со стандартизацией тесно связана *унификация* деталей и узлов машин — устранение излишнего многообразия изделий, сортамента материалов и т. п. путем сокращения их номенклатуры.

Важнейшей чертой современного машиностроения является *взаимозаменяемость*, без которой невозможно серийное и массовое производство машин.

*Взаимозаменяемостью называется свойство деталей и узлов машин, обеспечивающее возможность их использования при сборке без дополнительной обработки при сохранении технических требований, предъявляемых к работе данного узла.*

Из-за невозможности достижения абсолютной точности при изготовлении деталей действительные размеры отличаются от номинальных (рассчитанных, округленных и проставленных на чертеже). В зависимости от условий работы деталей в машине две сопряженные (охватываемая и охватывающая) детали образуют соединение, которое по характеру может быть подвижным или неподвижным. Характер соединения

определяется наличием и величиной зазора (для подвижных соединений) или натяга (для неподвижных соединений). Для образования зазора (рис. 5.1,а) диаметр вала (охватываемый размер) должен быть меньше диаметра отверстия (охватывающего размера), для образования натяга (рис. 5.1,б) наоборот.

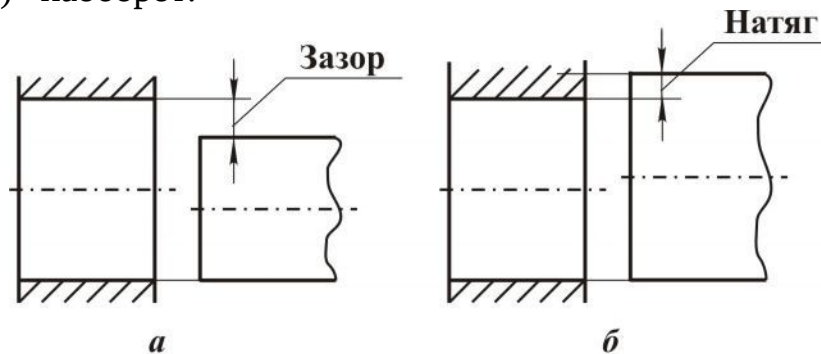


Рис. 5.1

По величине зазоров или натягов назначают ряд посадок: подвижная (с гарантированным зазором), прессовая (с гарантированным натягом) и переходные (в которых могут получаться зазоры или натяги).

При изготовлении деталей на их поверхности остаются следы обработки в виде неровностей. Критерием оценки качества поверхности является ее шероховатость, количественно характеризуемая высотой неровностей. Различают 14 классов шероховатости поверхности. Каждому классу шероховатости поверхности соответствуют определенные методы обработки, при которых получение данного класса является экономически целесообразным.

## 5.1. Передачи вращательного движения

Передача энергии от одной машины к другой или внутри машины от одного звена к другому выполняется с помощью различных механизмов, называемых *передачами*. Наиболее распространенными из них являются передачи вращательного движения. Это объясняется существенным преимуществом вращательного движения по сравнению с движением возвратно-поступательным. В последнем случае имеют место потери времени на холостой ход (вперед – рабочий ход, назад – холостой), а также большие динамические нагрузки, связанные с изменениями направления движения, что ограничивает увеличение рабочих скоростей машины.

Механические передачи классифицируют по различным признакам:

*по физическим условиям передачи движения*: трением (фрикционные, ременные, канатные); зацеплением одного звена за дру-

гой (зубчатые, червячные, цепные);

*по способу соединения ведущего и ведомого звеньев*: передачи с непосредственным касанием ведущего и ведомого звеньев (фрикционные, зубчатые, червячные); передача с промежуточным звеном, соединяющим ведущее и ведомое звенья (ременная, канатная, цепная).

**Передаточное отношение.** Важнейшей характеристикой любой передачи является *передаточное отношение*  $i$ , которое показывает, во сколько раз угловая скорость  $\omega$  (или частота вращения  $n$ ) ведущего вала передачи больше или меньше угловой скорости (или частоты вращения) ее ведомого вала. Если обозначить параметры ведущего звена индексом 1, а ведомого индексом 2, то передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Передаточные отношения в передачах различных типов (фрикционной, ременной, зубчатой, червячной) выражаются через отношение диаметров дисков (катков), шкивов, чисел зубьев зубчатых колес. То есть соответствующих параметров ведущего и ведомого звеньев (конструктивных элементов) передач.

### Преобразование вращающих моментов в передачах

Как уже было отмечено, между двигателем и машиной-орудием необходима механическая передача. Если не учитывать потери энергии в передаче (ее в таком случае называют идеальной), то подводимую и отводимую мощности можно считать равными.

Присвоив ведущему валу передачи, связанному с двигателем, индекс 1, а ведомому, связанному с машиной-орудием, индекс 2, можно это равенство записать как

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2, \text{ или } M_1 n_1 = M_2 n_2,$$

где  $M_1, M_2$  – вращающие моменты.

Если  $M_2 / M_1 = \omega_1 / \omega_2$  (или  $M_2 / M_1 = n_1 / n_2$ ), а правые части двух последних выражений являются передаточным отношением, то можно сделать вывод, что

$$i_{12} = M_2 / M_1.$$

Следовательно, *в идеальной передаче (без потерь энергии) изменение угловой скорости (или частоты вращения) обратно пропорционально изменению вращающих моментов.*



Обычно бывает нужно определить момент на ведомом валу пере-

дачи при известном моменте  $M_1$  на ведущем валу и передаточном отношении  $i_{12}$ . Очевидно, что без учета потерь энергии  $M_2 = M_1 i_{12}$ . С учетом этих потерь  $M_2 = M_1 i_{12} \eta$ , где  $\eta$  коэффициент полезного действия передачи (КПД).

При  $i_{12} < 1$  передача называется *понижающей* (редуктором). В этом случае  $n_2 < n_1$ ,  $M_2 > M_1$ . При  $i_{12} > 1$  передача называется *повышающей* (мультипликатором).

В этом случае  $n_2 > n_1$ ,  $M_2 < M_1$ .

### 5.1.1. Ременная передача

**Ременная передача** – это передача *гибкой связью* (рис.5.2), состоящая из ведущего **1** и ведомого **2** шкивов и надетого на них ремня **3**. В состав передачи могут также входить натяжные устройства и ограждения. Возможно использование нескольких ведомых шкивов и нескольких ремней. Шкивы жестко закреплены на ведущем и ведомом валах.

*Основное назначение* – передача механической энергии с понижением частоты вращения.

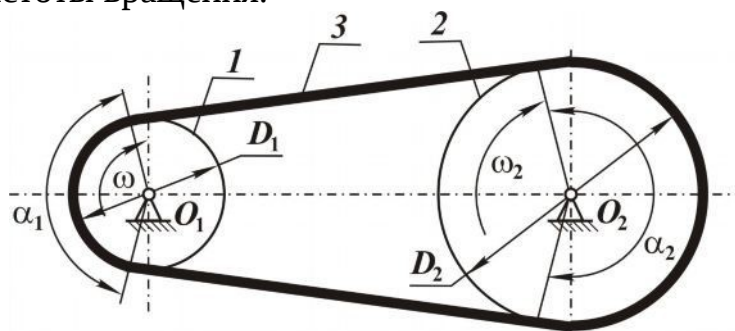


Рис. 5.2

По принципу действия различают передачи *трением* (большинство передач) и *зацеплением* (зубчато-ременные). В зависимости от формы поперечного сечения ремня различают ременные передачи: *плоские, клиновые, поликлиновые, круглые, квадратные*. Клиновые, поликлиновые, зубчатые и быстроходные плоские ремни изготавливают бесконечно замкнутыми. Плоские ремни преимущественно выпускают конечными – в виде длинных лент.

**Достоинства** ременных передач трением: отсутствие смазочной системы, простота и низкая стоимость конструкции, предохранение от

резких колебаний нагрузки и ударов, возможность передачи движения на значительные расстояния, защита от перегрузки за счет проскальзы-

вания ремня по шкиву, плавность и низкая шумность работы.

**Недостатки:** малая долговечность ремней в быстроходных передачах; значительные габариты; непостоянство передаточного отношения (из-за проскальзывания ремней на шкивах); необходимость защиты ремня от попадания масла; значительные силы, действующие на валы и опоры.

Для определения передаточного отношения ременной передачи принимают, что ремень не вытягивается и не проскальзывает на шкивах. Такое допущение не вносит существенной погрешности в расчеты. Поскольку линейная скорость [м/с] любой точки, лежащей на поверхности вращающегося тела (в нашем случае ведущего шкива), определяется как

$$V_1 = \omega_1 D_1 / 2,$$

где  $\omega_1 = \frac{D_1 n_1}{60}$  – угловая скорость, рад/с;  $D_1$  – диаметр шкива, м;  $n_1$  – число оборотов в минуту, об/мин.

Так как любая точка ремня, совпадающая с рассматриваемой точкой ведущего шкива, движется с той же линейной скоростью (а значит, и те точки ремня, которые контактируют с ведомым шкивом, и совпадающие с ними точки ведомого шкива имеют ту же линейную скорость).

Соответственно определяется также и линейная скорость любой точки обода ведомого шкива:  $V_2 = \omega_2 D_2 / 2$ . При этом отношение линейных скоростей и ведомого, и ведущего шкивов равно  $D_1 n_1 = D_2 n_2$ , или  $D_1 \omega_1 = D_2 \omega_2$  и, следовательно,  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$  или  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1}$ .

$$D_1$$

*Передаточное отношение передачи выражается отношением диаметров ведомого и ведущего шкивов:*

$$i_{12} = D_2 / D_1.$$

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (см. рис. 5.2), соответствующие дугам, по которым касаются ремень и шкив, называются *углами обхвата*.

Поскольку ременная передача передает вращение за счет сил трения между ремнем и шкивом, ее работоспособность существенно зависит от углов обхвата, определяющим из которых является угол обхвата на меньшем шкиве. Его величина в первую очередь зависит от расстояния между центрами шкивов (межосевое расстояние) и передаточного отношения. Практика показала, что плоскоремennая передача работает

нормально, если угол обхвата не менее 120 градусов. Это требование выполняется, если соблюдаются следующие условия:  $1/3 \leq i_{12} \leq 3$ ; меж-

севое расстояние не меньше удвоенной суммы диаметров шкивов.

Можно обеспечить работоспособность плоскоременной передачи и при больших передаточных отношениях, применив натяжной ролик 4 (рис. 5.3), который увеличит угол обхвата на меньшем шкиве.

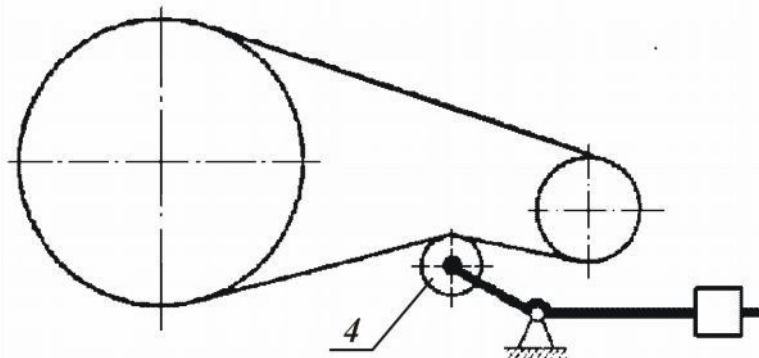


Рис. 5.3

Предельная окружная скорость плоскоременной передачи в зависимости от материала ремня лежит в пределах 20–40 м/с.

Более совершенным видом передачи движения гибкой связью является клиноременная, где на ободе шкивов сделаны канавки, в которые входит ремень, имеющий в поперечном сечении форму трапеции. В этих передачах полезная нагрузка передается за счет сил трения между боковыми поверхностями ремня и канавок шкивов. Трапециевидное сечение ремня за счет расклинивания увеличивает его сцепление со шкивом и повышает тяговую способность передачи. Это дает возможность осуществления более высоких передаточных отношений (до 7 и даже до 10), возможность применения при малых межцентровых расстояниях.

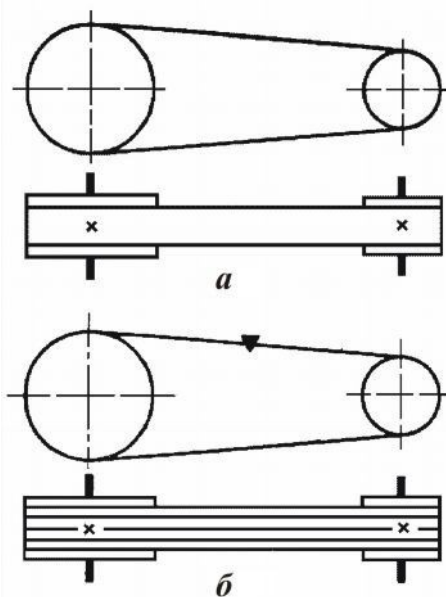


Рис. 5.4

Если для плоскоременной передачи межцентровое расстояние

$$A_{\min} = 2(D_1 + D_2)A_{\min},$$

то для клиноременной передачи  $A_{\min} = D_2$ . Возможность одной передачей осуществить вращение нескольких ведомых валов без применения натяжных роликов. Компактность позволяет осуществить простое ограждение.

На кинематических схемах ременные передачи имеют соответствующие условные обозначения (на рис. 5.4,а с плоским, а на рис. 5.4,б с клиновым ремнями).

В последнее время стали широко применяться зубчато-ременные передачи. На рабочей поверхности рем-

ня имеются выступы зубья, которые входят в зацепление с аналогичными зубьями на шкивах. Такие передачи работают без скольжения, что обеспечивает постоянство передаточного отношения.

В некоторых случаях применяют более сложную ременную передачу многоступенчатую (рис. 5.5), состоящую из нескольких ступеней (пар шкивов).

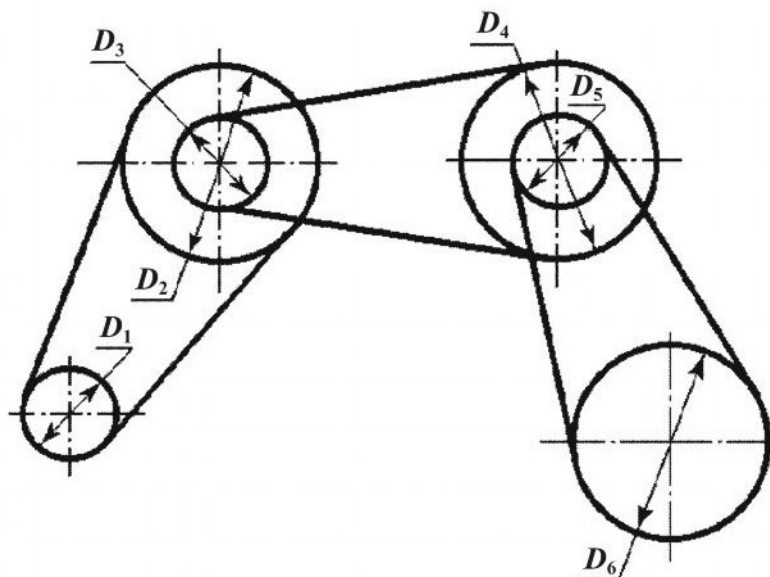


Рис. 5.5

Передаточные отношения отдельных ступеней ( $i_{12}$ ,  $i_{34}$ ,  $i_{56}$ ) выражаются через соотношения диаметров ведомых ( $D_2, D_4, D_6$ ) и ведущих ( $D_1, D_3, D_5$ ) шкивов. Применительно ко всей передаче

диаметр ведущего шкива, а  $D_6$  диаметр ведомого шкива, однако их отношение не будет искомым передаточным отношением всей передачи, так как эти шкивы не связаны единым ремнем.

Определим требуемое соотношение, приняв во внимание, что ведущий вал (не шкив!) каждой последующей ступени одновременно является ведомым валом предыдущей.

Передаточное отношение первой пары шкивов

$$i_{12} = \frac{n_1 D_1}{n_2 D_2}$$

откуда  $n_2 = n_1 \frac{D_1}{D_2}$ .

Передаточное отношение второй пары шкивов

$$i_{34} = \frac{n_3 D_4}{n_4 D_3}$$

Так как шкивы  $D_3$  и  $D_2$  закреплены на одном валу,  $n_2 = n_3$ .

Передаточное отношение третьей пары шкивов



$$i_5 = \frac{n_5 D_6}{n_6 D_5}$$

а  $n_5 = n_4$ , следовательно,  $n_6 = n_4 \frac{D_5}{D_6}$ .

Передаточное отношение всей передачи

$$i_{16} = \frac{n_1}{n_1} \frac{D_2}{D_1} \frac{D_4}{D_3} \frac{D_6}{D_5} \frac{D_1}{D_2} \frac{D_3}{D_4} \frac{D_5}{D_6} = \frac{n_1}{n_1} \frac{D_2}{D_1} \frac{D_4}{D_3} \frac{D_6}{D_5} \frac{D_1}{D_2} \frac{D_3}{D_4} \frac{D_5}{D_6}$$

Таким образом, передаточное отношение ременной многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений отдельных ее ступеней.

### 5.1.2 Фрикционная передача

Принцип действия фрикционной передачи, так же как и ременной, основан на использовании сил трения.

Простейшая фрикционная передача цилиндрическая (рис. 5.6) состоит из двух гладких дисков (катков), прижатых один к другому; в зоне их контакта возникают силы трения. При вращении ведущего диска сила трения, приложенная по касательной к ведомому диску, будет вращать последний. Так как работоспособность фрикционной передачи зависит от величины силы трения в контакте дисков, при изготовлении таких передач для дисков подбирают соответствующие материалы, обеспечивающие при взаимодействии высокий коэффициент трения. Для создания необходимого давления между катками применяют специальные нажимные устройства.

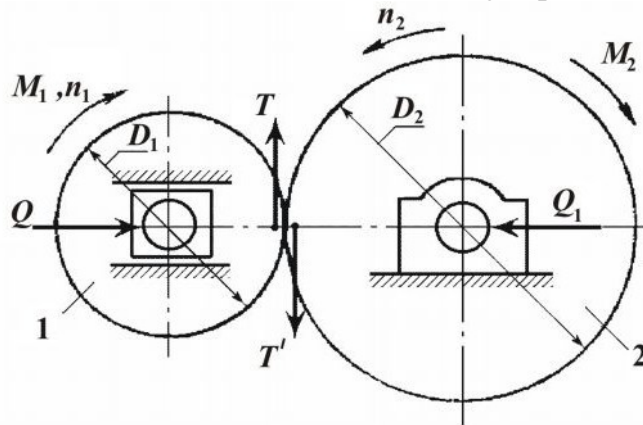


Рис. 5.6

**Достоинства** фрикционных передач: простота конструкции; плавность, бесшумность работы; возможность проскальзывания фрикцион-

ных катков при перегрузках, что предохраняет от поломок детали приводимого в движение механизма.

**Недостатки** фрикционных передач: ограниченная величина передаваемой мощности; большая нагрузка на валы и опоры валов; непостоянство передаточного числа, являющегося следствием взаимного проскальзывания катков; повышенный износ катков; низкий КПД.

При отсутствии проскальзывания между ведущим и ведомым звеньями передаточное число передачи (см. рис. 5.6) определяется как

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

С учетом скольжения, присутствующего практически всегда, передаточное число принимает следующий вид:

$$i_{12} = \frac{D_2}{D_1 (1 - \varepsilon)},$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент, учитывающий скольжение. Практически значения могут колебаться в пределах от 0,005 до 0,5.

### 5.1.3. Зубчатые передачи

#### 5.1.3.1. Цилиндрическая передача с эвольвентным профилем зубьев

Выше была рассмотрена фрикционная передача с гладкими цилиндрическими дисками. Если на этих дисках имеются зубья определенного профиля, расположенные на равном расстоянии один от другого, то передача называется *зубчатой цилиндрической* (рис. 5.7).

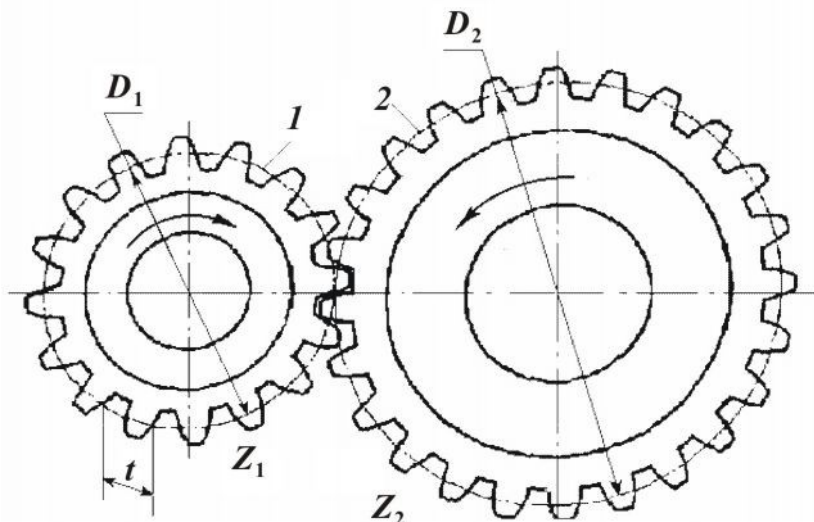


Рис. 5.7

При вращении ведущего зубчатого колеса его зубья взаимодейств-

вуют с находящимися с ним в контакте (зацеплении) зубьями ведомого колеса, в результате чего оно также начинает вращаться. Наиболее распространены передачи с эвольвентным зацеплением, при котором профили зубьев выполнены по эвольвенте. Такой профиль позволяет зубьям при вращении колес обкатываться друг по другу, вследствие чего зубчатая передача работает плавно, с небольшими потерями энергии на трение.

Зубчатые колеса бывают с прямыми (рис. 5.8,а), косыми (рис. 5.8,б) и шевронными (рис. 5.8,в) зубьями. Косозубые и шевронные колеса обеспечивают более плавный ход передачи, так как в зацеплении находятся од-

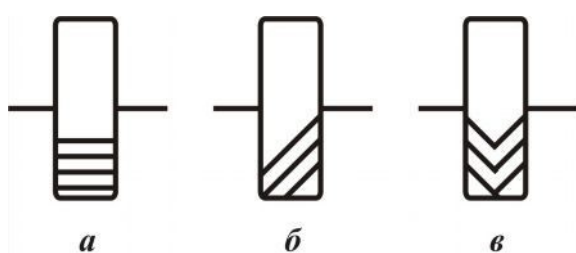


Рис. 5.8

новременно большее число пар зубьев по сравнению с прямозубой передачей. В отличие от ременной и фрикционной передач в зубчатой проскальзывание невозможно, поэтому передаточное отношение, а следовательно, и частота вращения ведомого вала всегда постоянны.

Если при вращении зубчатых колес представить себе в передаче две касающиеся окружности **1** и **2** диаметрами  $D_1$  и  $D_2$  (см. рис. 5.7), которые катятся одна по другой без скольжения, – это позволит распространить на зубчатую передачу основные кинематические закономерности фрикционной передачи.

Таким образом, для зубчатой передачи передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Однако воспользоваться приведенным соотношением для практического определения передаточного отношения нельзя, так как диаметры воображаемых окружностей (их называют *делительные окружности*) трудно измерить. Поэтому передаточное отношение необходимо выразить через другие, более удобные для измерений или определенных, величины.

Зацепление зубчатых колес в передаче требует соблюдения основного условия: зуб одного колеса должен точно входить в соответствующую ему при зацеплении впадину другого колеса. Ширину зуба и впадины, а также другие элементы зацепления рассчитывают по делительным окружностям, на которых основные элементы зубчатого зацепления равны аналогичным элементам зуборезного инструмента (вслед-

ствие этого делительные окружности используют при расчетах для настройки зуборезного станка).

При изготовлении стандартных зубчатых колес делительная окружность совпадает с *начальной окружностью*. Таким образом,



Рис. 5.9

можно сказать, что зубчатое зацепление возможно лишь при равенстве окружных шагов  $p$ , измеренных по дугам делительных окружностей (рис. 5.9).

Окружной шаг  $p$  это длина отрезка дуги делительной окружности, разделенной на число зубьев  $z$ .

На одном колесе  $d_1$  на другом  $d_2$  -  $p \frac{z_1}{d_1}$  Следовательно,

$\frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$ . Так как  $\frac{d_2}{d_1} = i_{12}$ , то

окончательно можно сделать вывод, что

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$$

*Передаточное отношение зубчатой передачи выражается через отношение чисел зубьев ведомого и ведущего колес.*

При наиболее распространенном способе изготовления зубчатых колес методом обкатки зуборезным инструментом число зубьев не может быть меньше 17; в противном случае инструмент будет подрезать основание зуба и ослаблять его. Наибольшее число зубьев теоретически не ограничено, однако и здесь есть разумный предел. С учетом этих ограничений установлены оптимальные величины передаточного отношения:

$$1 \leq i_{12} \leq 5(7).$$

Если иметь в виду наиболее распространенные понижающие передачи (то есть передачи с  $i < 1$ ), то намного увеличить передаточное отношение можно только путем создания *многоступенчатых пере-*

дач.

Например, для трехступенчатой передачи (рис. 5.10,а) общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней, то есть

$$i_{16} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \cdot i_{45} \cdot i_{56},$$

где  $i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$ ;  $i_{23} = \frac{z_3}{z_2}$ ;  $i_{34} = \frac{z_4}{z_3}$ ;  $i_{45} = \frac{z_5}{z_4}$ ;  $i_{56} = \frac{z_6}{z_5}$ .

Кроме простых зубчатых передач, иногда используют *передачи с промежуточными зубчатыми колесами*.

Передачу, показанную на рис. 5.10,б, можно представить как двухступенчатую со  $Z_1, Z_2$  и  $Z_2, Z_3$ , то есть считать, что колесо  $Z_2$  для первой ступени ведомое, а для второй ведущее. В этом случае общее передаточное отношение  $i_{13} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1}$ .

Аналогично передачу, показанную на рис. 5.10,в, будем считать состоящей из трех ступеней:

для нее  $i_{14} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_4}{z_1}$ .

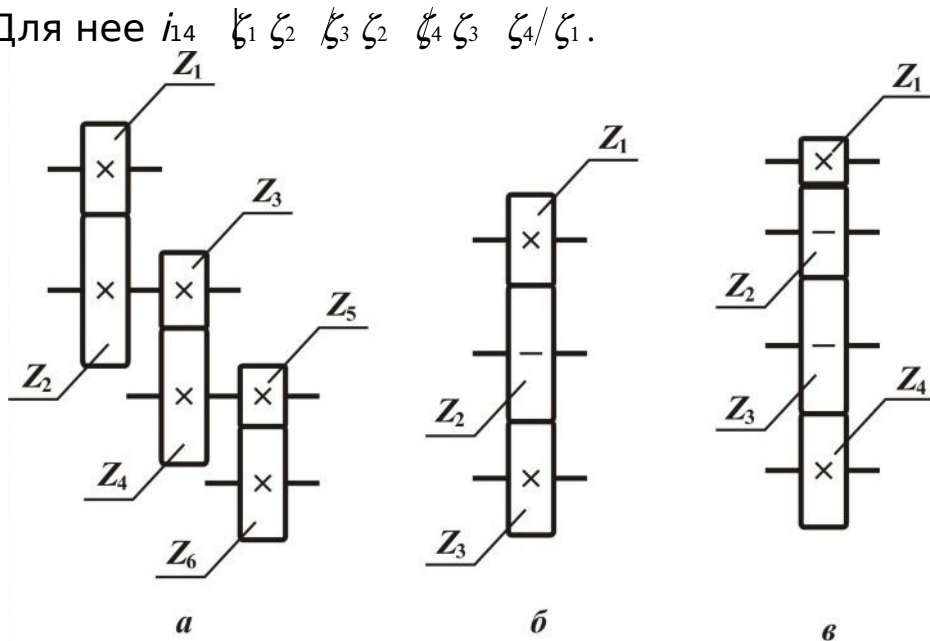


Рис. 5.10

Передачи, в которых промежуточные зубчатые колеса не изменяют передаточное отношение, применяют в двух случаях:

1) межосевое расстояние между ведущим и ведомым валами велико для одной пары колес;

2) на ведомом валу необходимо сохранить направление вращения ведущего вала (в этом случае число промежуточных колес должно быть четным). Промежуточное зубчатое колесо, одновременно зацепляющее



ся с двумя другими так, что по отношению к одному является ведомым,

а по отношению к другому ведущим, называется *паразитным*;

3) если в одной конструкции объединить рассматриваемые схемы (см. рис 5.10,б и рис 5.10,в), то получится *реверсивный механизм*, с помощью которого при неизменном направлении вращения ведущего вала ведомый вал будет изменять направление вращения в зависимости от числа включенных колес четного или нечетного.

### Геометрические элементы зубчатого зацепления

*Шаг зубчатой передачи* (расстояние между одноименными сторонами двух соседних зубьев колеса, измеренное по делительной окружности)  $p = \pi \frac{d}{z}$ . Отсюда можно определить *диаметр делитель-*

*ной окружности* (см. рис. 5.9)  $d = \frac{p \cdot z}{\pi}$ . Для первого колеса

$d_1 = \frac{p \cdot z_1}{\pi}$ , для второго  $d_2 = \frac{p \cdot z_2}{\pi}$ . Поскольку величина  $\frac{p}{\pi}$ , имеющаяся

в обоих выражениях, не может быть подсчитана точно, более удобно взамен ее ввести величину  $m$  [мм], называемую *модулем зубчатого колеса*:

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Значения модуля, являющегося основной геометрической характеристикой зубчатого колеса, стандартизованы, что облегчает изготовление и подбор зубчатых колес.

Расстояние от делительной окружности до вершины зуба называется *высотой головки зуба*  $h_a$  (см. рис. 5.9), а от делительной окружности до основания зуба *высотой ножки зуба*  $h_f$ .

Для цилиндрического зубчатого колеса можно легко определить основные размеры:

диаметр делительной окружности  $d = mz$ ;

диаметр окружности вершин  $d_a = d + 2 h_a = m(z + 2)$ ;

диаметр окружности впадин  $d_f = d - 2,4 h_f = m(z - 2,5)$ ;

расстояния между центрами колес  $a = \frac{d_1 + d_2}{2} = m \frac{(z_1 + z_2)}{2}$ .

Модуль готового колеса легко определить, измерив диаметр окружности вершин и разделив его на число зубьев, увеличенное на два (с последующим округлением до ближайшей стандартной величины), то

есть

$$m = \frac{d_a}{z - 2}.$$

Приведенные выше зависимости справедливы только для прямо-зубых колес. Геометрический расчет косозубых и шевронных колес более сложен и здесь не приводится.

### 5.1.3.2. Червячная передача

Червячная передача является зубчато-винтовой, состоит из червячного (косозубого) колеса с зубьями специальной формы и червяка-винта с трапецидальной резьбой. Она применяется для передачи вращения между валами, геометрические оси которых скрещиваются (рис. 5.11).

Для обеспечения зацепления шаг червяка должен быть равен окружному шагу червячного колеса. Червяк, как и обычный винт, может быть одно- и многозаходным. Если повернуть однозаходный червяк на один оборот, то связанное с ним червячное колесо повернется на угол, соответствующий одному шагу; при двухзаходном червяке поворот будет равен углу, соответствующему двум шагам, и т. д.

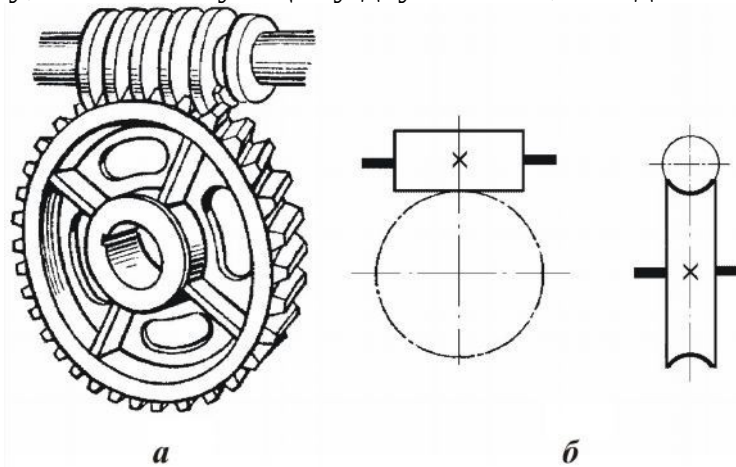


Рис. 5.11

Следовательно, передаточное отношение червячной передачи выражается через отношение числа зубьев колеса к числу заходов резьбы на червяке, то есть

$$i_{12} = \frac{Z_{\text{колеса}}}{Z_{\text{червяка}}}.$$

Червячная передача по сравнению с другими имеет такие преимущества, как плавность и бесшумность работы, возможность получать большие передаточные отношения. Например, вполне возможна червячная передача, у которой  $Z_{\text{колеса}} = 50$  и  $Z_{\text{червяка}} = 1$ , то есть  $i_{12} = 50$ .

Также к достоинствам червячной передачи можно отнести свой-

ство ее самоторможения, то есть движение может передаваться только от червяка к колесу, а это очень важно в грузоподъемных механизмах, так как передача позволяет обходиться без тормоза.

Однако в червячной передаче наиболее низкий КПД из-за больших потерь мощности на трение. Чтобы их снизить, для изготовления рабочих частей червячного колеса (венца) обычно используют антифрикционные материалы, например бронзу.

### 5.1.3.3. Зубчатая коническая передача

Механизм с коническими зубчатыми колесами (рис. 5.12) применяется при передаче вращения между валами с пересекающимися геометрическими осями, чаще всего перпендикулярными.

*Передаточное отношение зубчатой конической передачи выражается, как и в цилиндрической передаче, через отношение зубьев ведущего и ведомого валов, то есть*

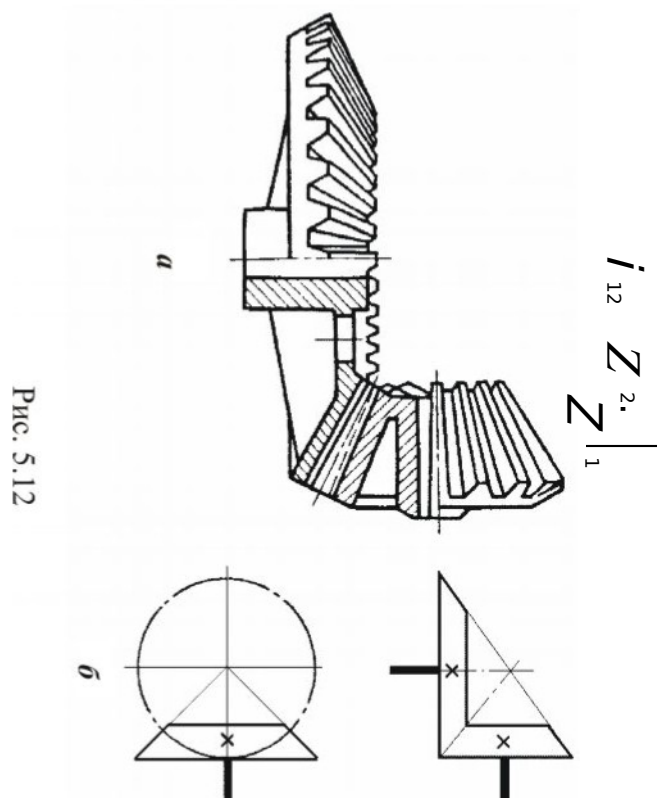


Рис. 5.12

Зубчатая коническая передача, подобно цилиндрической, может быть выполнена как с внешним, так и с внутренним зацеплением.

### 5.1.3.4. Планетарные и дифференциальные передачи

Все рассмотренные ранее передачи имеют одну общую особенность: геометрические оси их валов в пространстве неподвижны.

Передача, имеющая в своем составе зубчатые колеса с движущимися геометрическими осями, называется *планетарной*. Такое назва-

ние она получила потому, что одновременное вращение колеса вокруг своей оси и оси неподвижного колеса подобно движению планет вокруг Солнца.

Планетарные передачи компактны и позволяют получить очень большие передаточные отношения.

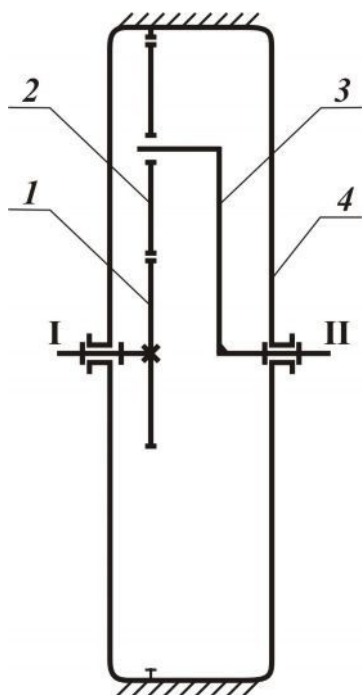


Рис. 5.13

Ведущим колесом планетарной передачи (рис. 5.13) является зубчатое колесо **1**, которое называется *центральной*, или *солнечным*. В зацеплении с ним находится колесо **2**, называемое *сателлитом* (спутником), и связанное с солнечным колесом водилом **3**. Чтобы иметь возможность вращаться вокруг солнечного колеса и тем самым приводить в движение водило, сателлит внутренним зацеплением соединен с зубчатым колесом **4**, которое неподвижно закреплено в корпусе механизма и называется *неподвижным*, или *упорным* колесом.

Если в рассмотренной передаче освободить упорное колесо, то получится *дифференциальная* передача. В этом случае движение водила (оно является ведомым) будет результатом сложения двух независимых движений ведущих колес – **1** и **4**. Дифференциальные механизмы позволяют не только суммировать два движения, но и, наоборот, передавать движение от одного ведущего вала к двум ведомым при разной их относительной скорости.

#### 5.1.4. Цепная передача

Цепная передача, как и ременная, относится к передачам с промежуточным звеном (передача гибкой связью).

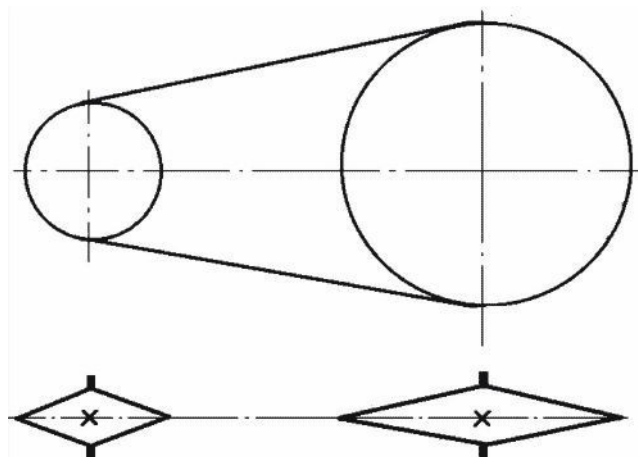


Рис. 5.14

Цепная передача (рис. 5.14) осуществляется при помощи бесконечной цепи, охватывающей две (или более) звездочки колеса с зубьями специального профиля. Она служит для передачи движения только между параллель-



ными валами.

В отличие от ременной передачи цепная передача работает подобно зубчатой без проскальзывания.

Основные **достоинства** цепной передачи:

- компактность;
- меньшая, чем в ременных передачах, нагрузка на валы;
- возможность передачи движения на значительные расстояния до (5 8 м);
- возможность передачи движения одной цепью нескольким валам;
- сравнительно высокий КПД передачи (до 0,98).

**Недостатки** цепной передачи:

- увеличение шага цепи (цепь вытягивается) вследствие износа шарниров, что требует применения натяжных устройств;
- более сложный уход по сравнению с ременными передачами (смазка, регулировка, устранение перекоса валов);
- повышенный шум.

*Передаточное отношение цепной передачи выражается через отношение зубьев ведомой и ведущей звездочек, то есть*

$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Цепные передачи широко применяются в устройствах для обработки материалов, сельхозмашинах и транспортных устройствах. Современные цепные передачи используются при передаточных отношениях  $i \leq 10$ , при скоростях цепи до  $V = 25$  м/с и для передачи мощности до 150 кВт.

По характеру выполняемой работы цепи делятся на приводные, грузовые, тяговые. В свою очередь, каждая группа по конструктивным признакам делится на различные типы. Например, приводные на роликовые, втулочные и зубчатые.

## 5.2. Механизмы, преобразующие движение

### 5.2.1. Зубчато-реечный механизм

Одним из простых и распространенных механизмов, преобразующих движение, является зубчато-реечный механизм (см. рис. 5.15), состоящий из зубчатого колеса и зубчатой планки с нарезанными на ней зубьями.

Зубчато-реечный механизм можно использовать для различных целей, например, вращая зубчатое колесо на неподвижной оси, поступа-

тельно перемещать рейку (в домкрате, механизме подачи сверлильного станка) или, обкатывая колесо на неподвижной рейке, перемещать ось колеса относительно рейки (при осуществлении продольной подачи суппорта в токарном станке).

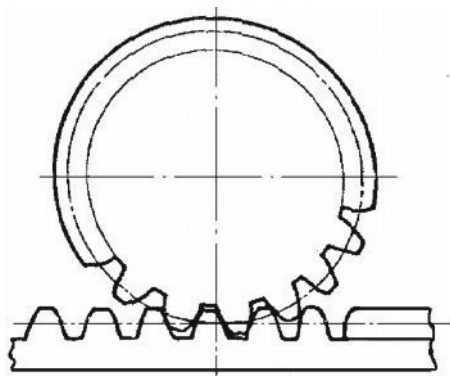


Рис. 5.15

Основные кинематические закономерности в зубчато-реечном механизме легко обнаружить, если соотнести скорость поступательного движения рейки (или оси колеса во втором случае) с окружной скоростью колеса. Так как отсутствует проскальзывание, ясно, что эти скорости равны.

### 5.2.2. Кривошипно-шатунный механизм

Кривошипно-шатунный механизм (КШМ) один из самых распространенных шарнирно-рычажных механизмов (рис.5.16).

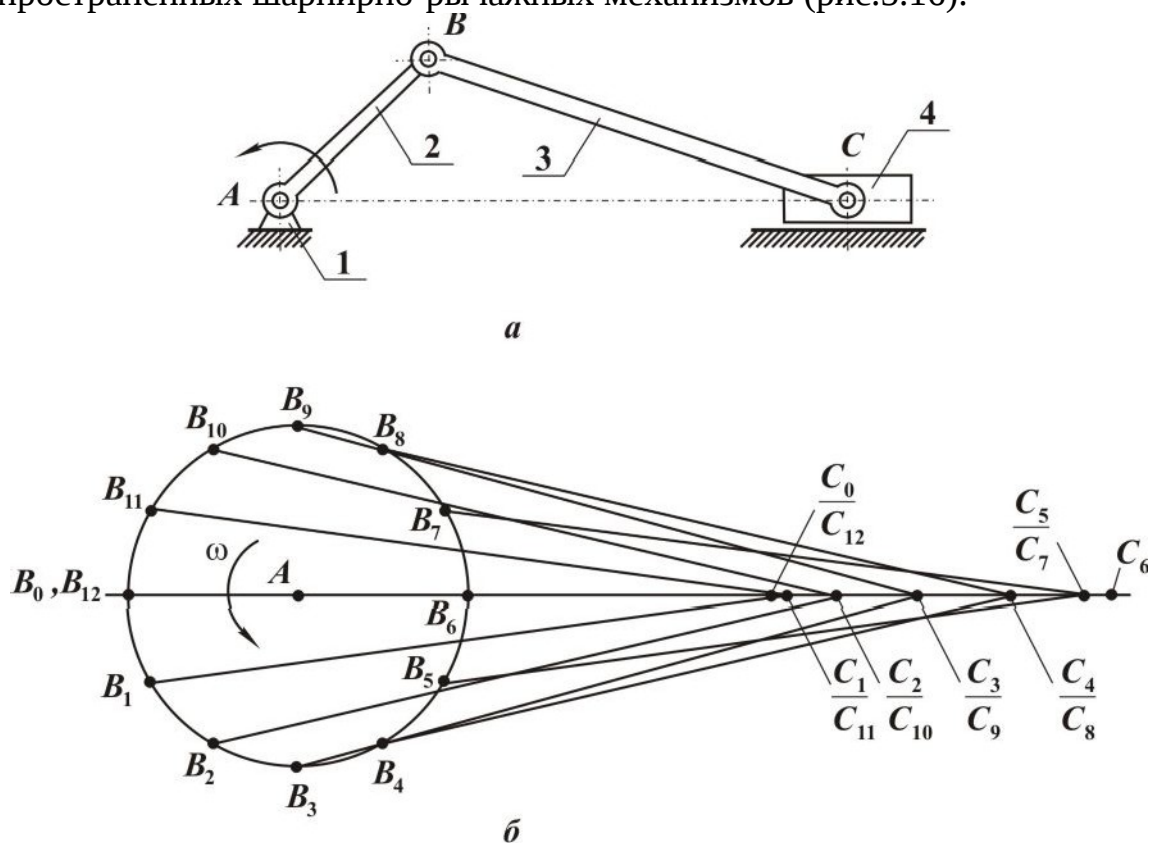


Рис. 5.16

Он применяется как для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное (например, механические ножовки, порш-

невые насосы), так и для преобразования поступательного движения во вращательное (например, двигатели внутреннего сгорания).

Кривошип (см. рис. 5.16,а) постоянно вращается, ползун 4 совершает возвратно-поступательное, а шатун 3 сложное плоскопараллельное движение, стойка 1 является неподвижным звеном.

При повороте кривошипа на равные углы ползун проходит неравные участки пути. Это легко обнаружить, если на одной схеме изобразить звенья механизма в последовательно занимаемых им положениях (рис. 5.16,б). Таким образом, равномерное вращение кривошипа преобразуется в неравномерное возвратно-поступательное движение ползуна. Полный ход ползуна равен удвоенной длине кривошипа.

### 5.2.3. Кривошипно-кулисный механизм

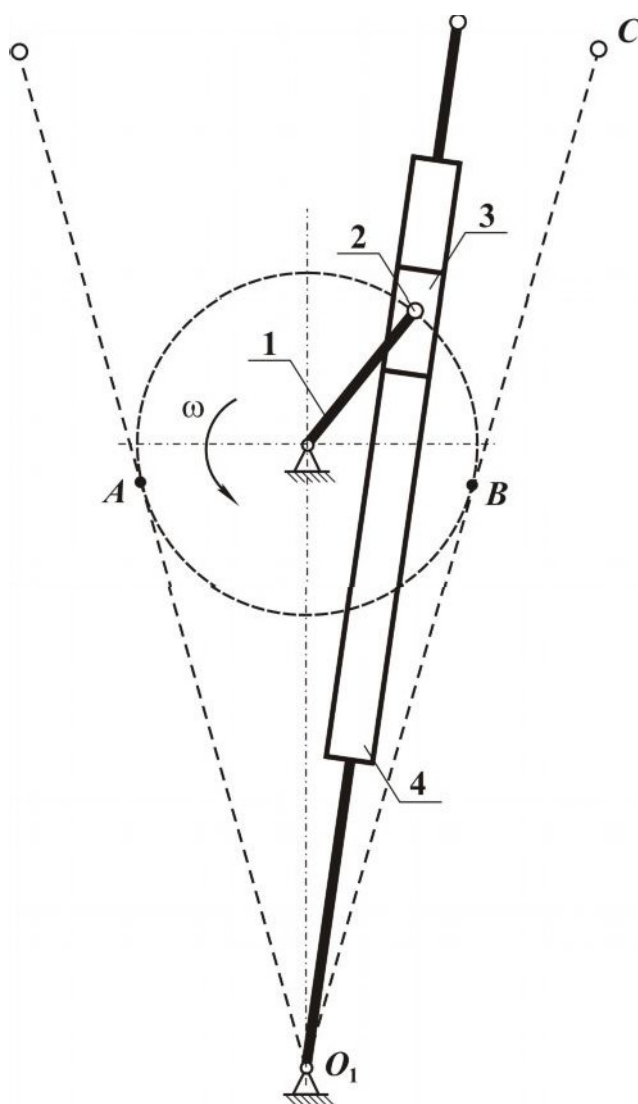


Рис. 5.17

В кривошипно-шатунном механизме скорости движения ползуна, то есть его перемещения от крайнего левого положения до крайнего правого и наоборот, равны. Но в некоторых случаях желательно получить иной закон движения ползуна. Например, в поперечно-строгальном станке необходимо иметь различные скорости рабочего и холостого ходов резца, совершающего возвратно-поступательное движение. Для этого применяют кривошипно-кулисный механизм (рис. 5.17).

Вокруг неподвижной оси вращается кривошип 1, на конце которого имеется палец 2. На палец свободно насажен ползун 3, скользящий в продольном прямолинейном пазу, прорезанном в рычаге 4 (кулисе). При вращении кривошипа ползун скользит в пазу кулисы и поворачивает ее вокруг не-

подвижной оси.

При перемещении пальца из положения *A* в положение *B* кулиса перемещается из крайнего левого положения в крайнее правое, а при дальнейшем перемещении пальца из положения *B* в *A* она совершает обратный ход. Так как углы поворота кривошипа, на конце которого находится палец, при этом не равны, то и время, а следовательно, и скорости движения кулисы будут различны.

В итоге резец, связанный с концом кулисы, будет в одном направлении совершать медленный (рабочий) ход, а в другом быстрый (холостой).

### 5.2.4. Кулачковый механизм

Кулачковые механизмы позволяют осуществлять любой закон ведомого звена при непрерывном равномерном вращении ведущего звена. Простейший дисковый или плоский кулачковый механизм (рис. 5.18) представляет собой кулачок (диск) **1** с прижатым к нему пружиной **3** игольчатым толкателем (ползуном) **2**.

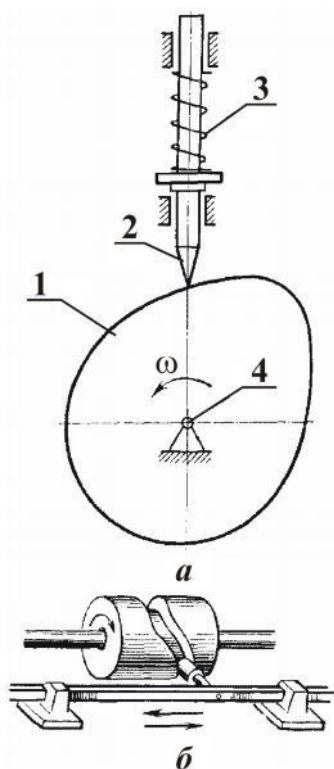


Рис. 5.18

К числу недостатков кулачковых механизмов следует отнести

При вращении вала **4** кулачок давит на толкатель, заставляя его совершать возвратно-поступательное движение. Изменяя профиль кулачка, можно как угодно изменять закон движения толкателя и связанного с ним рабочего органа машины. Именно эта особенность обеспечивает широкое применение кулачковых механизмов в металло-режущих станках-автоматах, ткацких станках, полиграфических машинах.

Кроме рассмотренного механизма, существует и более сложный кулачковый механизм пространственный. В нем кулачок имеет форму цилиндра с расположенным на его поверхности замкнутым пазом (канавкой).

В паз входит ролик, расположенный на оси, закрепленной в ползуне. При вращении кулачка ползун совершает возвратно-поступательное движение.

К числу недостатков кулачковых механизмов следует отнести

сложность изготовления профиля кулачка, от которого требуется, особенно для скоростных передаточных механизмов, большая точность.

### 5.2.5. Винтовые механизмы

Винтовой механизм, состоящий из пары винт-гайка, широко используется для преобразования вращательного движения в поступательное. Возможно несколько вариантов конструкции и, соответственно, применения такого механизма:

- ведущий винт неподвижная гайка (винт, вращаясь, перемещается поступательно);
- ведущий винт поступательно подвижная гайка;
- ведущая гайка поступательно подвижный винт;
- ведущая гайка вращательно-подвижный винт.

К **достоинствам** винтовых механизмов относятся: простота получения медленного поступательного движения и возможность большого выигрыша в силе, плавность, бесшумность, способность воспринимать большие нагрузки, возможность осуществления перемещений с высокой точностью, простота конструкции.

**Недостатками** винтовых механизмов являются большие потери на трение и, как следствие, низкий КПД. Во многих случаях применяют винты с углами подъема резьбы, обеспечивающими самоторможение, то есть не превышающими угла трения, при этом КПД винтовой пары ниже 50 %.

Винты в винтовых механизмах, в зависимости от назначения, разделяют на *грузовые* (домкраты, прессы, тиски) и *ходовые* (служащие для точной передачи движения в станках, измерительных устройствах).

Гайки грузовых и ходовых винтов, к которым не предъявляют высоких требований в отношении точности, выполняются цельными. Гайки точных винтовых механизмов имеют конструкцию, позволяющую уменьшить зазор между витками винта и гайки, образовавшийся в результате неточности при изготовлении или износа в процессе работы.

Кинематический расчет винтового механизма прост: за один оборот винта или гайки линейное перемещение равно ходу резьбы, то есть произведению шага на число заходов.

### 5.2.6. Механизмы прерывистого одностороннего действия

Прерывистое движение в одну сторону чаще всего осуществляет-

ся при помощи храповых и мальтийских механизмов.

**Храповые механизмы** применяют для осуществления движений подачи инструмента и обрабатываемого материала в различных станках. Кроме того, их используют в качестве тормозных устройств, препятствующих обратному ходу. Так, храповой механизм в грузоподъемных лебедках предотвращает падение поднятого груза.

Основой храпового механизма служит храповая пара (рис. 5.19), состоящая из останавливаемого звена **1**, которое называется *храповиком*, и останавливающего звена **2**, называемого *собачкой*, или *щеколдой*. Замыкая оба звена стойкой **3**, получаем храповой механизм.

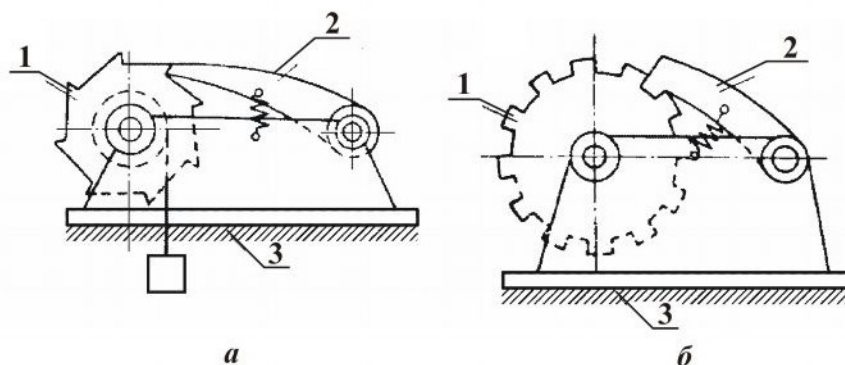


Рис. 5.19

Храповые механизмы делятся на два основных класса:

1) механизмы, в которых храповик задерживается собачкой только в одном направлении, а в другом может двигаться и приподнимать собачку (рис. 5.19,а);

2) механизмы, в которых храповик затормаживается в двух направлениях. К этому классу относятся механизмы, имеющие храповики с симметричными зубьями (рис. 5.19,б). Действие такого храповика соответствует работе двух противоположно действующих храповых механизмов.

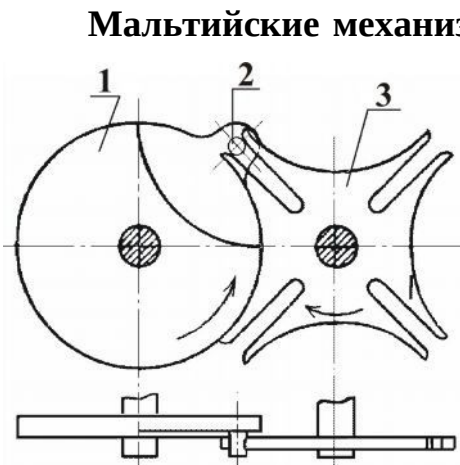


Рис. 5.20

**Мальтийские механизмы** (рис. 5.20) применяют для преобразования непрерывного вращения ведущего звена **1** в прерывистое движение ведомого звена **3**. Палец **2**, закрепленный на ведущем звене **1**, последовательно входит в прорези ведомого звена (креста **3**). На рисунке показан момент начала движения креста **3**. Палец **2** находится в начале прорези. При вращении звена **1** по часовой стрелке палец входит внутрь прорези, приближаясь к оси вращения креста, а

затем начинает удаляться от оси и выходит из прорези.

Пока палец перемещается по прорези, крест поворачивается, а после выхода пальца из прорези крест останавливается. Палец, продолжая вращаться, через некоторое время входит в следующую прорезь креста, и движение повторяется.

Если крест имеет четыре прорези, как показано на рисунке, то при одном полном обороте пальца крест поворачивается на четверть оборота.

Мальтийские механизмы изготавливают с тремя, четырьмя, пятью, шестью и восемью прорезями креста, что соответствует  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$  и  $1/8$  оборота ведомого звена на один оборот ведущего.

### 5.3. Детали и сборочные единицы передач вращательного движения

#### 5.3.1. Валы и оси

Валы и оси – детали, несущие на себе вращающиеся части машины: зубчатые колеса, шкивы, барабаны, звездочки и т. д.

Ось обычно представляет собой сплошное или полое ступенчатое (реже гладкое) тело цилиндрической формы (рис. 5.21). Оси бывают вращающиеся и неподвижные. Например, вагонная ось с закрепленными на ней колесами вращается, а ось велосипеда неподвижна, колесо вращается относительно нее.

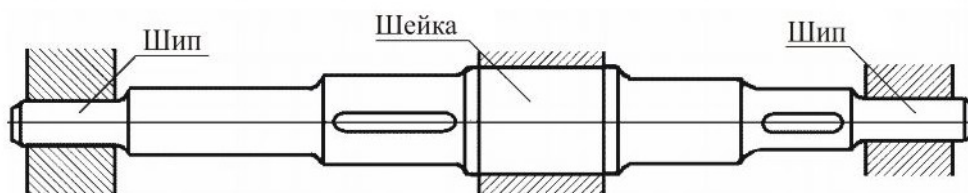


Рис. 5.21

Наиболее распространенные – прямые валы, по форме не отличающиеся от осей, но существенно отличаются от них по характеру работы. Одно из отличий – валы не могут быть неподвижными, они обязательно вращаются. Но главное отличие оси от вала состоит в том, что ось только несет на себе части машины, и следовательно, подвергается только изгибу, а валы, кроме того, еще и передают вращающий момент, а значит, испытывают одновременное действие изгиба и кручения. Например, шпиндель токарного станка представляет собой полый прямой вал. Вращающему моменту, который передается на шпиндель от электродвигателя (через промежуточные валы) противодействует момент,

создаваемый силой резания. Одна из составляющих этой силы, кроме того, изгибает шпиндель.

Оси рассчитывают как балки на поперечный изгиб, а валы на усталостную прочность (выносливость в результате совместного действия изгиба и кручения).

### 5.3.2. Опоры осей и валов (подшипники)

Вращающиеся оси и валы своими шейками цапфами (рис. 5.22) опираются на неподвижные опоры подшипники. В зависимости от характера трения между вращающимися неподвижными деталями различают *подшипники скольжения* и *подшипники качения*.

**Подшипники скольжения.** Простейший подшипник скольжения для цапфы вала выполняется в виде отверстия в станине или корпусе машины, однако после износа он не может быть восстановлен.

Поэтому целесообразнее делать подшипники в виде самостоятельного узла втулки с фланцем. Еще более совершенна конструкция, в которой внутрь такого подшипника запрессовывается втулка из специального антифрикционного материала (например, бронзы), что позволяет при износе заменять не весь подшипник, а только втулку.

Наиболее часто, особенно при больших нагрузках, применяют подшипник с разрезной втулкой разъемными вкладышами (рис. 5.22). Он состоит из корпуса 1, разъемного вкладыша 2, крышки 3 и болтов 4. Через специальные отверстия в крышке на трущиеся поверхности поступает масло. Такой разъемный подшипник удобно устанавливать на любом участке вала (неразъемный только на концевой опоре шипе).

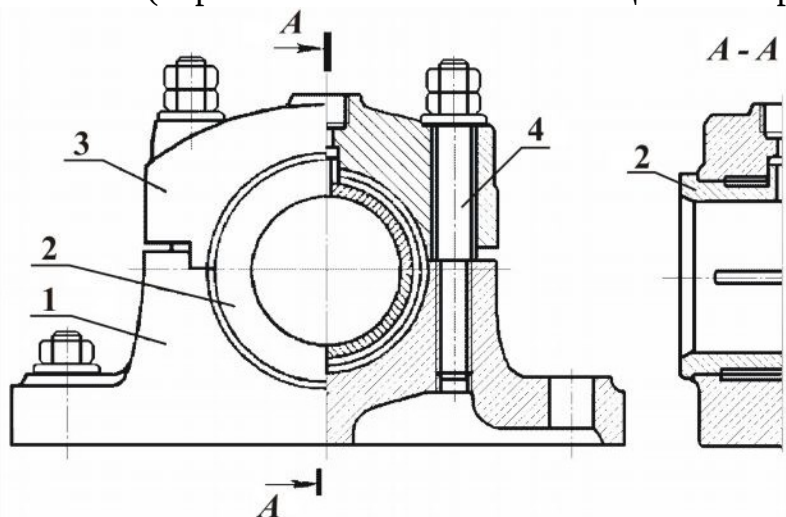


Рис. 5.22

Удобство монтажа и демонтажа, а также относительная простота



конструкции являются достоинством подшипников скольжения. Однако у них есть и существенные недостатки, в первую очередь большие потери мощности на преодоление трения скольжения.

**Подшипники качения.** Широкое применение подшипников качения объясняется малой потерей мощности на преодоление трения, а также их унификацией.

Подшипник качения (рис. 5.23) состоит из внутреннего **2** и наружного **1** колец, тел качения **3** (в данном случае – шариков) и сепаратора **4**.

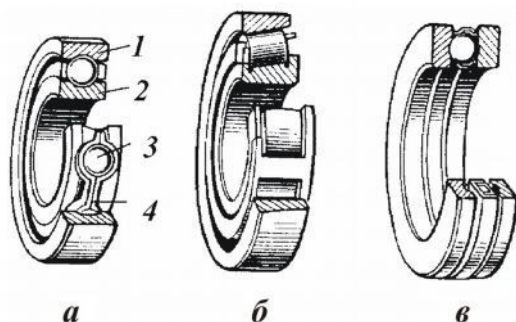


Рис. 5.23

Внутреннее кольцо насаживается на вал, а наружное закрепляется в корпусе.

Между вращающимся и неподвижным кольцами расположены тела качения, удерживаемые на постоянном расстоянии друг от друга сепаратором. В зависимости от формы тел качения подшипники делятся на шариковые, роликовые, игольчатые; а в зависимо-

сти от числа рядов тел качения на одно-, двух-, многорядные. По направлению нагрузок, для восприятия которых предназначены подшипники, различают: радиальные, осевые (упорные) и радиально-упорные.

Все подшипники стандартизированы. В зависимости от соотношения радиальных и осевых размеров их разделяют на серии: мягкую, среднюю и тяжелую.

Подшипники разделяют также по нагрузочной способности (динамической грузоподъемности), то есть по способности в течение определенного срока выдерживать без разрушения заданную нагрузку при заданной угловой скорости вращения вала. В справочных таблицах (каталогах подшипников) указывается динамическая грузоподъемность, по которой выбирают подшипник для конкретных условий работы.

### 5.3.3. Муфты

Муфты предназначены для передачи вращения с одного вала на другой, расположенный с ним соосно.

Если муфта рассчитана на постоянное соединение валов, то она называется постоянной. К постоянным муфтам относятся поперечно-свертная (см. рис. 5.24,а) и продольно-свертная (см. рис. 5.24,б) муфты, состоящие из двух полумуфт, соединенных болтами. Вращающий момент передается шпонками. Подобные муфты называются глухими, они

просты по конструкции, однако имеют существенный недостаток – необходимо точное центрирование соединяемых валов при сборке.

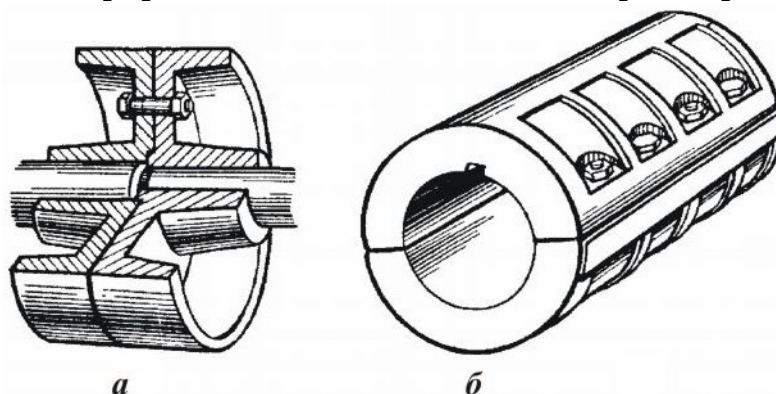


Рис. 5.24

Этого недостатка нет у компенсирующих муфт. Конструкция их сложнее, однако и возможности шире – они могут соединять валы, имеющие смещения и перекося геометрии осей.

Если в такой муфте смещение и перекося валов компенсируются упругими элементами, например стальными пластинчатыми пружинами или резиновыми кольцами, то ее называют упругой, если же упругих элементов нет – муфта называется жесткой.

Из упругих компенсирующих муфт наиболее широкое применение получили втулочно-кольцевые (рис. 5.25,а), не менее часто используют жесткие крестово-шарнирные муфты (рис. 5.25,б), состоящие из двух вилок и крестовины.

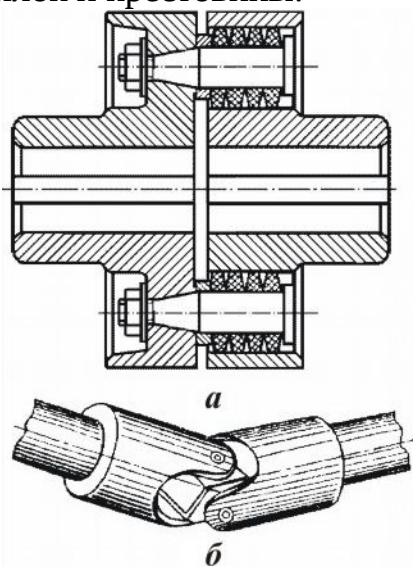


Рис. 5.25

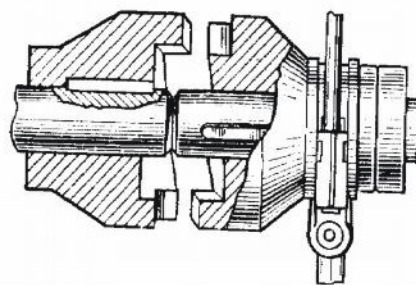


Рис. 5.26

При необходимости в процессе работы многократно соединять и разъединять валы применяют сцепные муфты, из которых наиболее часто применяют кулачковую (рис. 5.26). Одна из полумуфт жестко соединена с

валом, а другая может перемещаться вдоль него по шпонке или шлицам. При включении муфты кулачки, имеющиеся на торцевых поверхностях одной полумуфты, входят во впадины другой и передают вращение.

#### 5.4. Соединения деталей

Соединения деталей машин могут быть *разъемными* и *неразъемными*. Разъемные соединения (болтовые, шпоночные, шлицевые и т. д.) можно разбирать и вновь собирать без разрушения деталей узла. Неразъемные соединения (заклепочные, сварные и другие) могут быть разобраны лишь путем разрушения сварного шва, заклепок или других элементов.

##### 5.4.1. Заклепочные соединения

Заклепочные соединения остаются еще распространенным видом неразъемного соединения при изготовлении металлических конструкций из легких сплавов, для которых еще не разработаны методы надежной сварки.

До недавнего времени заклепочные соединения широко применяли в различных инженерных сооружениях — судах, котлах, мостах, кранах и др. В последние десятилетия область применения таких соединений резко сузилась в связи с развитием методов сварки.

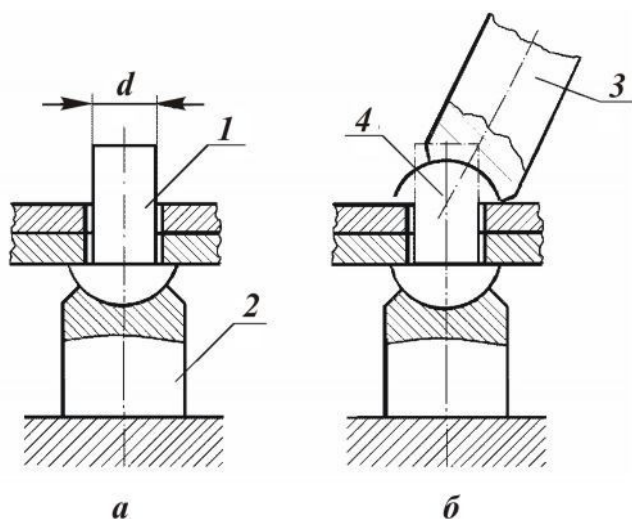


Рис. 5.27

пояемым деталям.

В процессе клепки выступающая часть цилиндрического стержня под ударами молотка или под давлением специальной клепальной машины на обжимку 3 превращается (расклепывается) в другую, так называемую *замыкающую головку* 4 (рис. 5.27,б).

Основные типы заклепок показаны на рис. 5.28,а, 5.28,б и 5.28,в.

Заклепка (рис. 5.27,а) — цилиндрический стержень 1 круглого поперечного сечения, на конце которого имеется закладная головка 2. Стержень заклепки вводят в просверленное (или продавленное) в соединяемых частях конструкции отверстия так, чтобы закладная головка плотно прижималась к скре-

Кроме этих заклепок, в самолетостроении и некоторых других отраслях

промышленности применяют специальные типы заклепок, например *пистоны* (см. рис. 5.28,г и 5.28,д).

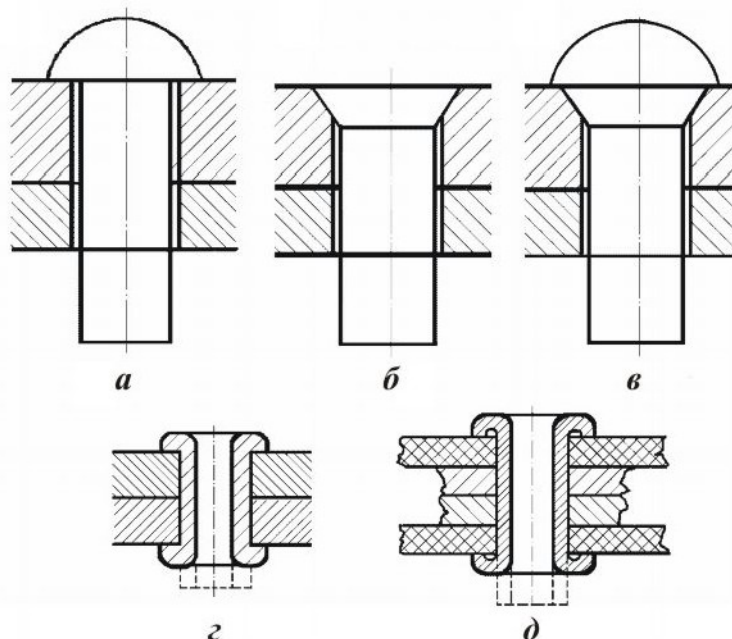


Рис. 5.28

В качестве материала для заклепок используют малоуглеродистую сталь, медь, алюминий и другие, в зависимости от назначения шва и материала склепываемых деталей.

*Место соединения листов с помощью заклепок называется заклепочным швом.*

По назначению различают заклепочные швы:

- *прочные*, от которых требуется только прочность конструкции;
- \* *плотные*, которые, помимо прочности, должны обеспечивать герметичность конструкции, например: паровых котлов, цистерн.

По взаимному расположению листов различают заклепочные швы *внахлестку* и *встык*, с одной или двумя накладками. В зависимости от расположения заклепок швы делятся на *однорядные* и *многорядные*. Заклепки могут располагаться в *шахматном порядке* или *параллельными рядами*.

#### 5.4.2. Сварные соединения

В современном производстве в качестве неразъемных соединений широкое распространение получили соединения, осуществляемые при помощи сварки.

*Сварка процесс соединения металлических частей пу-*

*тем применения местного нагрева с доведением свариваемых участков до пластического или жидкого состояния.*

В первом случае соединение частей достигается при помощи их дальнейшего сдавливания.

Основные преимущества сварки по сравнению с заклепочными соединениями:

1. Экономия материала и облегчение конструкции, что достигается благодаря:

- лучшему использованию материала, так как их рабочие сечения не ослабляются отверстиями под заклепки, поэтому при сварке можно применять меньшие сечения;
- возможности применения стыковых швов, не требующих накладок;
- меньшему весу соединительных элементов при сварке (вес заклепок больше веса сварных швов).

2. Уменьшение трудоемкости в связи с исключением операций разметки и сверления отверстий, кроме того, сварка может быть автоматизирована.

3. Возможность соединения деталей с криволинейным профилем.

4. Плотность соединения.

5. Бесшумность технологического процесса.

*Основными видами сварки являются: газовая, контактная, электродуговая.*

*Газовая сварка.* Свариваемый металл в месте соединения доводится до плавления. Необходимая для этого температура получается при сжигании горючих газов (ацетилена и др.) в струе кислорода.

Высокая температура сгорания ацетилена позволяет сваривать толстые металлические части (до 40 мм).

Газовую сварку применяют для сваривания элементов из малоуглеродистых сталей, тонких стальных листов, чугунов, цветных металлов и сплавов.

Исключительное место занимают процессы газовой резки металла. Прорезы получаются за счет сгорания металла в струе кислорода.

*Контактная сварка.* Металл разогревается теплом, выделяющимся при прохождении тока через стык соединяемых элементов, доводится до пластического состояния и сдавливается. Методом контактной сварки соединяют встык полосовой и круглый материал (стыковая сварка) и внахлестку тонколистовой материал (точечная, роликовая сварка).

*Электродуговая сварка.* При этом методе сварки металл расплавляется теплом электрической дуги, образуемой в месте сварки меж-

ду электродом и свариваемыми деталями.

Различают электродуговую сварку плавящимся и неплавящимся электродом. На рис. 5.29 показана принципиальная схема электродуговой сварки плавящимся электродом.

Дуговая сварка может производиться вручную и на специальных высокопроизводительных автоматах, обеспечивающих высокое качество шва.

Сварные швы, выполняемые электродуговой сваркой, можно разделить на стыковые и угловые.

Стыковыми называют швы, которые соединяют торцы деталей, находящиеся в одной плоскости. Перед сваркой кромки стыкуемых торцов должны быть обработаны для облегчения доступа электрода к поверхностям, которые подлежат оплавлению.

Соединение внахлестку выполняют угловыми швами: лобовыми (рис. 5.30,а) или фланговыми (рис. 5.30,б).

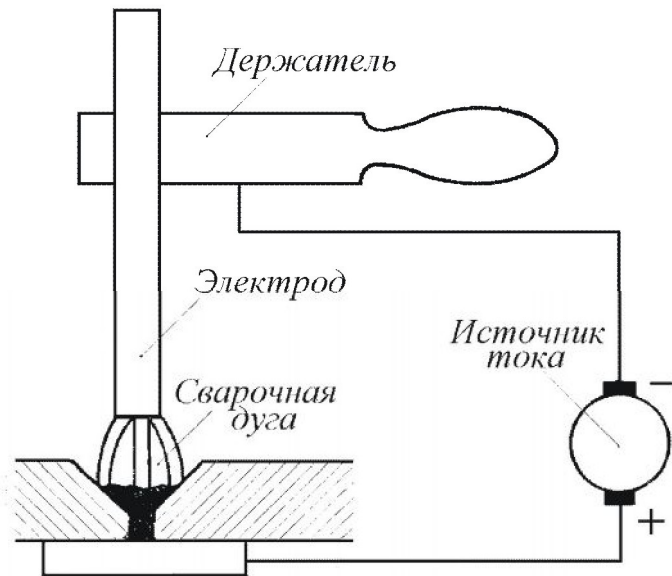


Рис. 5.29

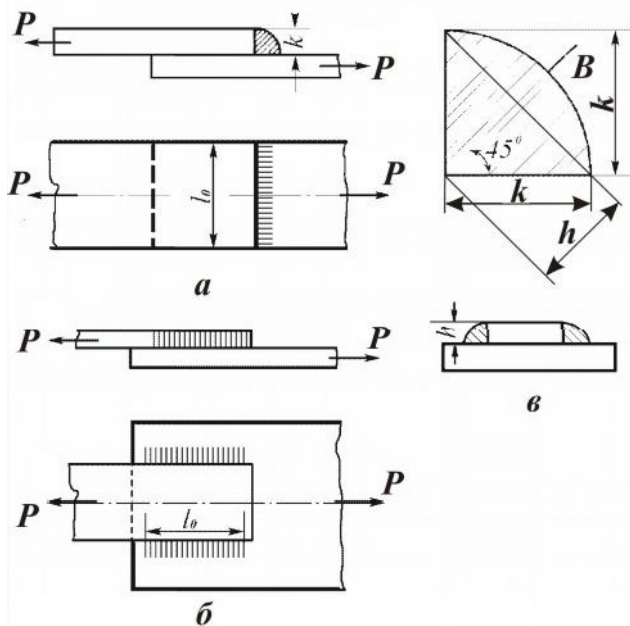


Рис. 5.30

Нормальный профиль углового шва представляет собой равнобедренный треугольник. Возможны швы усиленные и облегченные. Кроме соединений сплошным сварным швом, часто применяют прерывистый шов, а также электрозаклепки.

Сварка широко используется в машиностроении не только взамен клепки, но и при изготовлении деталей сложной конфигурации.

### 5.4.3. Клеевые соединения, соединения пайкой, запрессовкой, заформовкой

*Клеевые соединения.* Клеевое соединение применяют для соединения элементов из металла, металла и неметаллического материала (текстолита, пенопласта и др.), неметаллических материалов между собой.

Клеевое соединение имеет следующие основные преимущества по сравнению со сварными и заклепочными:

- возможность надежного соединения деталей из очень тонких листовых материалов;
- возможность скрепления разнородных материалов;
- гладкость поверхности клеевых конструкций;
- отсутствие концентрации напряжений;
- герметичность;
- стойкость против коррозии.

Недостатками клеевого соединения являются сравнительно низкая теплостойкость, относительно низкая прочность.

Прочность клеевых соединений зависит от конструкции соединения и видов внешних нагрузок, от марки клея, рабочей температуры соединения, времени, соблюдения технологии склеивания. Наибольшей прочностью при прочих равных условиях обладают соединения, работающие на чистый сдвиг или чистый отрыв.

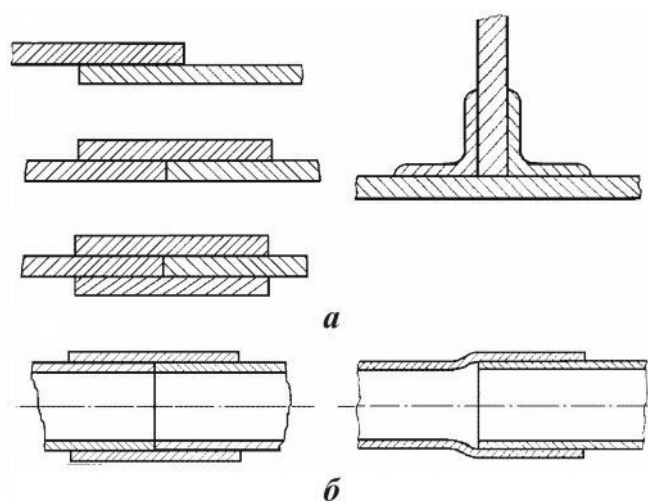


Рис. 5.31

На рис. 5.31,а показаны наиболее распространенные типы клеевых соединений листовых материалов, а на рис. 5.31,б - соединения труб.

Клеи чрезвычайно разнообразны. В настоящее время существует более ста различных марок, различающихся физико-механическими и технологическими свойствами.

*Соединения пайкой.* В некоторых случаях для создания соединения применяют пайку, например, в целях уменьшения электросопротивления в соединениях электрических схем и др.



Пайка осуществляется при помощи припоя. Расплавленный припой заполняет зазор между соединяемыми деталями и при затвердевании образует неразъемное соединение. Поверхность соединяемых деталей перед пайкой очищают при помощи специальных веществ – флюсов. В качестве флюсов обычно применяют канифоль, буру, хлористый цинк.

Припои, в зависимости от их температуры плавления, разделяют на легкоплавкие (мягкие), у которых температура плавления ниже  $400^{\circ}\text{C}$ , и тугоплавкие (твердые) с температурой плавления более  $400^{\circ}\text{C}$ .

*Соединения запрессовкой.* Для неподвижного соединения деталей цилиндрической формы может применяться прессовая посадка (например, соединения зубчатого колеса с валом, втулки с валом и др.). При прессовой посадке вал изготавливают большего диаметра, чем отверстие детали, поэтому посадка вала в отверстие осуществляется при помощи пресса, создающего необходимую силу, или при помощи нагрева охватывающей или охлаждения охватываемой детали.

*Соединение заформовкой.* Заформовкой соединяют металлические детали с пластмассой. Металлические детали погружают в жидкую или тестообразную пластмассу, которая затвердевает при остывании и образует прочное неразъемное соединение.

#### **5.4.4. Шпоночные и шлицевые соединения**

*Шпоночные соединения.* Шпонкой называют стержень, вводимый между валом **1** и посаженной на него деталью **2** (зубчатым колесом, шкивом, муфтой) для взаимного соединения и передачи вращающего момента от вала к детали или от детали к валу. Шпонки могут быть клиновые, призматические и сегментные. Примеры шпоночного соединения приведены на рис. 5.32. Шпонки изготавливают из стали, имеющей

предел прочности  $\sigma_s = 500 \text{ Н/м}^2$ .

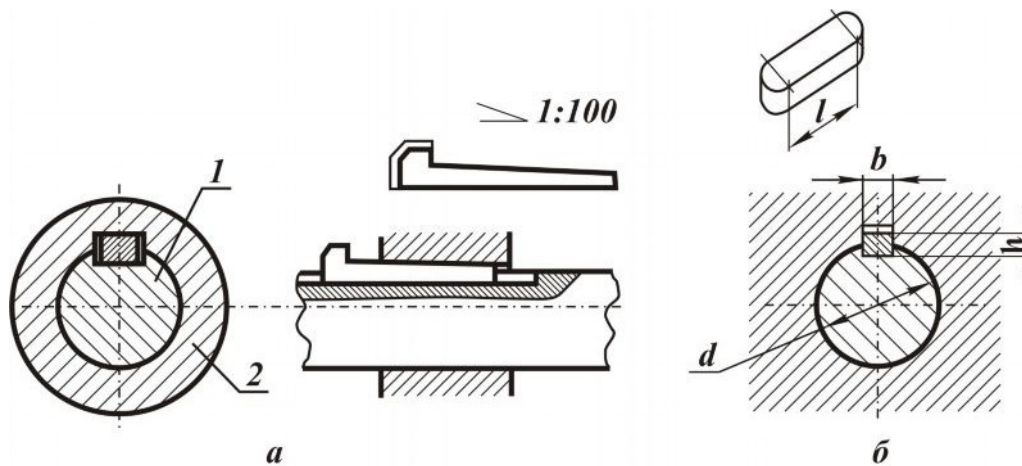


Рис. 5.32

Канавки для шпонок вызывают значительное ослабление валов, так как создают значительную концентрацию напряжений. Для снижения концентрации напряжений, а также для лучшего центрирования деталей и уменьшения напряжений смятия применяют шлицевое соединение деталей с валом. Этот вид соединений получил в последнее время наибольшее распространение.

**Шлицевые соединения.** Шлицевые соединения образуются выступами на валу и соответствующими впадинами в насаживаемой детали. Вал и деталь с отверстием обрабатывается так, чтобы боковые поверхности шлицов или участки цилиндрических поверхностей сопрягаемых деталей плотно прилегали друг к другу.

#### 5.4.5. Резьбовые соединения

Резьбовые соединения, то есть соединения деталей с использованием резьбы, являются наиболее распространенными в машиностроительной практике и технике вообще. К ним относятся соединения с помощью резьбовых муфт, болтов, винтов, шпилек, стяжек и т. п. Основным элементом резьбового соединения является резьба.

Все применяемые в машиностроении резьбы разделяются на *крепежные* и *специальные*. Крепежная резьба имеет треугольный профиль. К крепежным резьбам относятся: *метрическая*, *дюймовая* и *трубная*.

Все крепежные резьбы имеют треугольный профиль. К специальным резьбам относятся: *трапецеидальная* и *прямоугольная*.

Профиль метрической резьбы — равнобедренный треугольник с углом профиля, с основанием, равным шагу, и с притуплением (на  $1/8$  высоты у винта и на  $1/4$  высоты у гайки) вершиной (рис. 5.33).

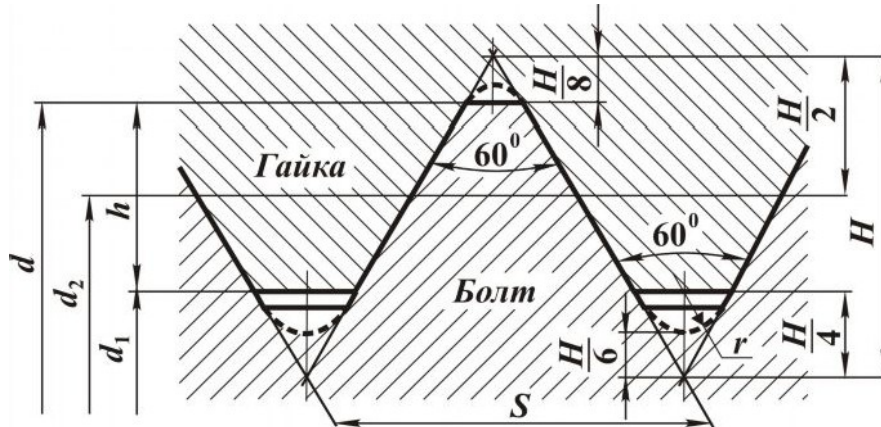


Рис. 5.33

Метрические резьбы делятся на резьбы с крупными и мелкими шагами. Резьбы с мелким шагом наиболее надежны по отношению к самоотвинчиванию при знакопеременных или вибрационных внешних нагрузках на соединение.

*Дюймовая резьба* это резьба с углом профиля  $\alpha = 55^\circ$  и размерами в дюймах. Дюймовая резьба применяется только при замене изношенных частей имеющегося оборудования. Использовать ее во вновь изготавливаемых машинах не разрешается.

*Трубная резьба* (рис. 5.34) аналогична дюймовой, но не имеет зазоров при вершине; применяется для соединения труб, арматуры, то есть там, где необходима герметичность соединения.

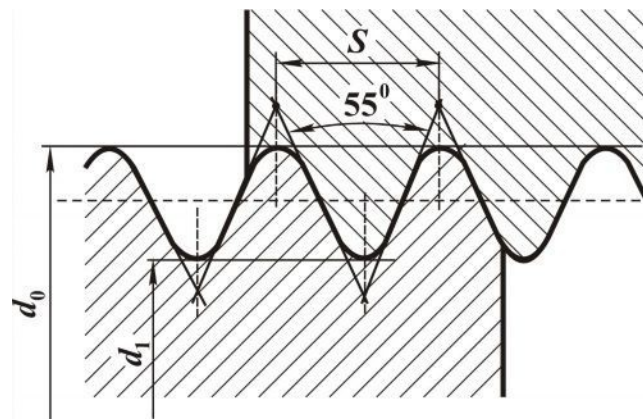


Рис. 5.34

*Трапецеидальная резьба* (рис. 5.35) в профиле равнобокая трапеция с углом профиля – применяется для силовых винтов, передающих движение в обе стороны

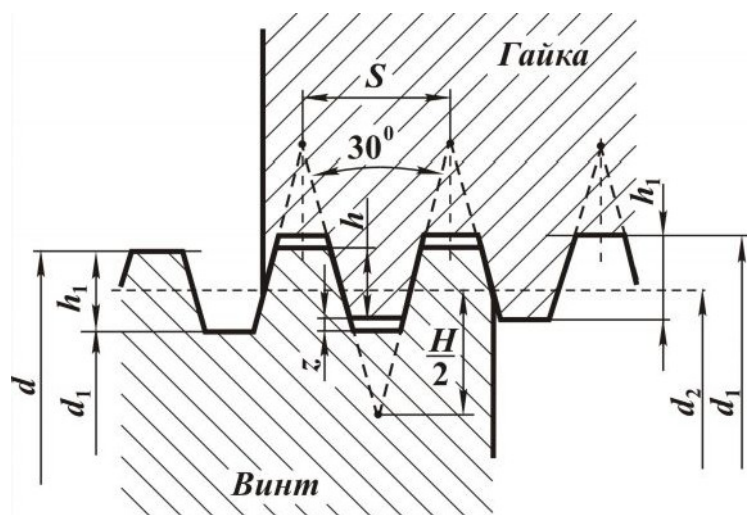


Рис. 5.35

Для грузовых винтов (домкратов, прессов и т. п.) применяется также прямоугольная резьба, которая имеет некоторые преимущества перед трапецеидальной (выигрыш в силе и больший КПД), но она не стандартизована и применяется сравнительно редко по следующим причинам:

- нарезание прямоугольной резьбы возможно только на токарном станке, а трапецеидальная может быть получена и на резьбофрезерном, что значительно производительнее;
- она менее прочна;
- возникающие при износе зазоры не регулируются.

*Резьбовые крепежные изделия.* К ним относятся: болты, винты, шпильки, гайки, детали трубопроводов (ниппели, сгоны, муфты и т. д.).

*Болтом* называется цилиндрический стержень с резьбой и имеющий головку. За головку болт вращается или, наоборот, удерживается от вращения при соединении деталей. Нарезанной частью болт ввинчивается в гайку.

*Винт* отличается от болта только тем, что вворачивается не в гайку, а в резьбовое отверстие одной из соединяемых деталей.

На рис. 5.36,а показано стандартное болтовое соединение двух деталей, состоящее из болта, гайки и шайбы.

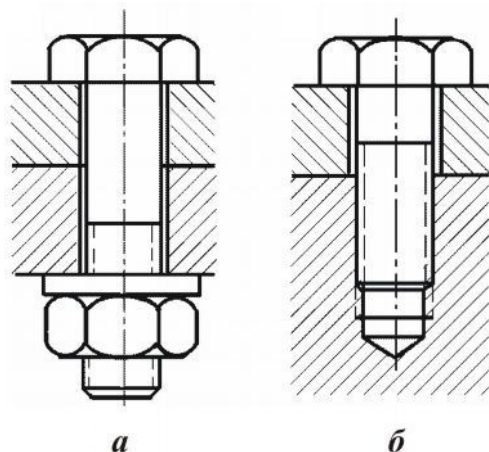


Рис. 5.36

Головка болта имеет форму шести- или четырехгранной призмы.

Стержень болта входит в отверстия соединяемых деталей с зазором. На стержень навинчивается гайка. Между гайкой и соединяемыми деталями, во избежание повреждения детали вращающейся гайкой, ставят кольцевую пластинку шайбу.

Болтовое соединение применяется для соединения деталей малой толщины. Соединение винтом, ввинчиваемым в одну из скрепляемых деталей, показано на рис. 5.36,б. В зависимости от размеров и назначения болты и винты имеют различные головки (см. рис. 5.37): *а* шестигранные; *б* четырехгранные; *в* цилиндрические с внутренним шестигранником; *г* цилиндрические с внутренним шлицем под отвертку; *д* полукруглые со шлицем; *е* потайные со шлицем.

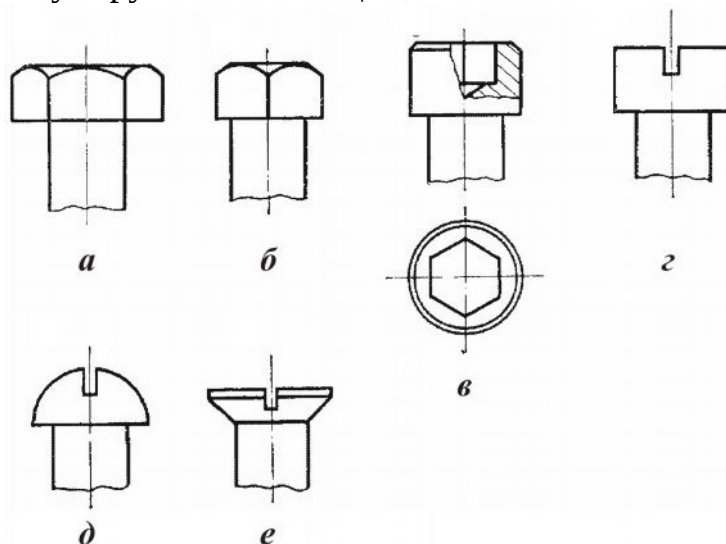


Рис. 5.37

Соединение деталей посредством шпильки представлено на рис. 5.38.

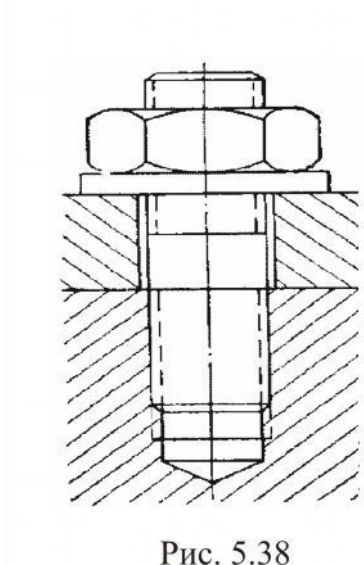


Рис. 5.38

**Шпилька** – цилиндрический стержень, имеющий винтовую нарезку с обоих концов. При соединении шпилькой ее ввертывают в одну деталь, а на другой конец наворачивают гайку.

Несмотря на то, что все крепежные резьбы удовлетворяют условию самоторможения, при вибрациях возможны случаи самоотвинчивания. Во избежание самоотвинчивания применяют особые устройства, называемые гаечным замком. Некоторые из них приведены на рис. 5.39.

**Контргайка** (см. рис. 5.39,а) – вторая гайка, наворачиваемая поверх основной и создающая в резьбе силу трения.

**Шплинт** – проволока полукруглого поперечного сечения, сложенная вдвое и пропущенная через гайку и болт (рис. 5.39,б) или только через болт (рис. 5.39,в).

**Пружинная шайба** (рис. 5.39,г) – специальная шайба, подкладываемая под гайку. Отвертыванию гайки препятствуют острые края концов шайбы, упирающиеся в торец гайки и в прижимаемую деталь.

На рис. 5.39,д и 5.39,е изображены еще две конструкции замков. В обоих случаях повороту гайки препятствует загнутый край или лепесток специальной шайбы, подложенной под гайку.

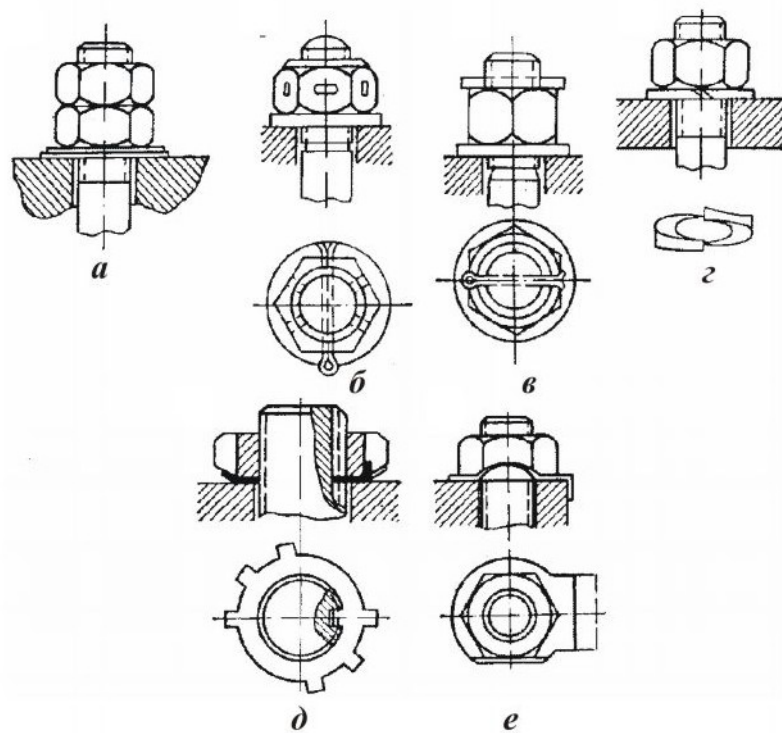


Рис. 5.39

## Список литературы

1. Путьята Т. В., Можаровский Н. С. и др. Прикладная механика. – Киев.: Вища школа, 1977. – 536 с.
2. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В двух томах. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 15 изд. стер.. – М.: Высшая школа, 2005. – 416 с.
4. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. – 38 изд., стереотип.. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
5. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / 9 изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
7. Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник / 8 изд. – М.: Высшая школа, 1988. – 367 с.
8. Айзенберг Т. Б. и др. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1970. – 416 с.
9. Миролубов И. Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Машиностроение, 1974. – 493 с.
10. Борисов М. И., Зуев Ф. Г. Основы технической механики и детали механизмов приборов. – М.: Машиностроение, 1977. – 341 с.
11. Мовнин М. С. и др. Основы технической механики. – Л.: Судостроение, 1969. – 568 с.



