

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**
Учебное пособие

Ижевск 2022

Рассмотрены основные понятия теории моделирования, классификации моделей и моделирования, основы планирования эксперимента и основы построения регрессионных моделей для исследования технологических процессов .

Учебное пособие для студентов-бакалавров

Содержание

Введение.....	5
Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	7
Глава 1. Модели. Моделирование.....	7
1.1. Основные понятия и определения.....	7
1.2. Цели и принципы моделирования.....	9
1.3. Аксиомы теории моделирования.....	10
1.4. Виды моделей и моделирования.....	11
1.5. Функции моделей.....	16
1.6. Факторы, влияющие на модель объекта.....	16
Вопросы для самоконтроля.....	20
Глава 2. Математическое моделирование.....	21
2.1. Основные понятия и определения.....	21
2.2. Требования к математической модели.....	23
2.3. Структура математической модели.....	23
2.4. Классификация математических моделей.....	24
2.5. Цели математического моделирования для технических объ- ектов и технологических процессов.....	26
Вопросы для самоконтроля.....	27
Глава 3. Алгоритм построения модели.....	27
3.1. Технологии моделирования.....	27
3.2. Алгоритм построения аналитической модели.....	28
3.3. Алгоритм построения эмпирической модели.....	28
3.4. Краткая характеристика основных этапов алгоритмов по- строения аналитических и эмпирических моделей.....	29
Вопросы для самоконтроля.....	33
Раздел 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.....	34
Глава 4. Планирование и проведение эксперимента.....	34
4.1. Основные понятия и определения.....	34
4.2. Планирование эксперимента.....	36
4.2.1. Выбор уровней факторов.....	36
4.2.2. Полный факторный эксперимент.....	38
4.3. Проведение эксперимента.....	40
Вопросы для самоконтроля.....	41
Глава 5. Регрессионные модели с одной входной переменной.....	41
5.1. Основные понятия.....	41

5.2. Адекватность регрессионных моделей.....	47
5.3. Точность регрессионных моделей.....	48
5.4. Виды регрессионных моделей с одной входной переменной.....	50
Вопросы для самоконтроля.....	50
Глава 6. Регрессионные модели с несколькими входными переменными.....	51
6.1. Многофакторная (множественная) линейная регрессия.....	51
6.2. Матричный подход к определению коэффициентов регрессии.....	52
6.3. Оценка адекватности и точности многофакторной линейной модели.....	54
6.4. Линейные регрессионные модели с несколькими входными переменными.....	55
6.5. Нелинейные регрессионные модели с несколькими входными переменными.....	55
6.6. Шаговые методы построения регрессионных моделей.....	57
Вопросы для самоконтроля.....	59
Глава 7. Интерпретация и оптимизация регрессионных моделей.....	60
7.1. Интерпретация модели.....	60
7.2. Оптимизация модели.....	61
Вопросы для самоконтроля.....	62
Заключение.....	63
Библиографический список.....	64

Введение

Пятьдесят лет назад слова «модель», «моделирование» были известны только очень узкому кругу высокопрофессиональных специалистов, связанных или с исследованием сложных физических и природных процессов и явлений, или с созданием сложных технических объектов (в основном, как правило, военного назначения). Сегодня слова «модель» и «моделирование» известны даже школьникам, используются в обычной жизни и уже не воспринимаются как узкоспециальные термины. Компьютерные информационные технологии расширили возможности моделирования, и сегодня трудно представить научно-исследовательскую и серьезную проектную деятельность без использования методологии и современных средств построения и использования моделей. Можно констатировать, что за последние десятилетия моделирование оформилось в самостоятельную междисциплинарную область знаний со своими объектами, закономерностями, подходами и методами исследования и относится к общим методам научного познания.

Данное учебное пособие ориентировано на студентов профессионально-педагогических вузов всех форм обучения специальности 050501.65 Профессиональное обучение, специализации 030501.08 Технологии и оборудование машиностроения. Технология машиностроения как наука занимается изучением закономерностей, действующих в процессе изготовления машин, в целях использования этих закономерностей для обеспечения требуемого качества машин, заданного их количества при наименьшей стоимости [1]. Проектирование технологических процессов сборки изделий и обработки компонентов изделий является важнейшей задачей технологической подготовки машиностроительного производства, решить которую позволяет использование моделей (прежде всего математических) и моделирования. Данное учебное пособие содержит теоретический материал по основным разделам дисциплины «Моделирование технологических процессов» и позволяет студентам получить знания и представления об основах и методологии моделирования, о построении и применении моделей в технологических процессах машиностроения.

Для успешного освоения данного курса студентам необходимо иметь

теоретические знания и практические навыки по следующим дисциплинам

учебного плана: «Высшая математика», «Информатика», «Теория резания металлов», «Технология машиностроения».

Результатом изучения курса «Моделирование технологических процессов» должно стать усвоение студентами основных понятий и определений теории моделирования, классификаций моделей и видов моделирования, особенностей применения различных моделей и математического моделирования, алгоритмов построения моделей, основ построения и исследования однофакторных и многофакторных регрессионных моделей.

Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Глава 1. Модели. Моделирование

1.1. Основные понятия и определения

Термин «*модель*» (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) вошел в математику в XIX в. в связи с развитием неевклидовой геометрии.

Сегодня в литературе можно встретить множество определений понятия «*модель*». Приведем лишь некоторые из них.

Под *моделью* понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты [2].

Модель – это упрощенное, можно сказать «упакованное» знание, несущее вполне определенную ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его свойства [2].

Модель – объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала [3].

Модель – реально существующая или мысленно представляемая система, которая, замещая и отображая оригинал с определенной целью, находится с ним в отношениях подобия (сходства) [4].

Анализ опыта использования моделей в естественных, технических и гуманитарных науках позволяет сделать вывод, что модель – это наше представление об исследуемом объекте, своеобразная форма кодирования информации об объекте.

Таким образом, можно сказать, что *модель* – это объект любой природы, который при исследовании способен замещать реально существующий объект с целью получения новой информации о последнем. Это определение и примем за основное в рамках данной работы.

С моделями мы сталкиваемся еще в детстве, играя машинками, домиками, куклами, которые представляют собой уменьшенные копии (модели) реально существующих объектов. В кружке технического творчества ребенок учится создавать модели технических объектов. В школе практически все обучение осуществляется с применением моделей. Подрастая, мы привыкаем использовать мысленные образы-модели ситуаций для про-

гнозирования результатов своей деятельности. Без преувеличения можно сказать, что в своей осознанной жизни человек имеет дело исключительно с моделями тех или иных реальных объектов, процессов, явлений.

Кроме понятия «*модель*» в моделировании есть еще ряд важных понятий. *Объект* (от лат. *objectum* – предмет) – все, на что направлена человеческая деятельность [3]. Любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом состояний и параметров.

Процесс – определенная совокупность действий, направленных на достижение поставленной цели.

Система – целенаправленное множество объектов любой природы [3].

Таким образом, можно сказать, что *система* – это совокупность взаимосвязанных элементов и компонентов, имеющая вполне конкретную структуру и вполне конкретное целевое назначение.

Элемент системы – часть системы, не подвергаемая дальнейшему делению.

Внешняя (окружающая) среда – множество существующих вне системы (объекта) элементов любой природы, оказывающих влияние на систему (объект) или находящихся под ее (его) воздействием [3].

Гипотеза (от гр. *hypothesis* – основание, предположение) – определенные предсказания, предположительные суждения о причинно-следственных связях явлений, основанные на некотором количестве опытных данных, наблюдений, догадок [2].

Аналогия (от гр. *analogia* – соответствие, соразмерность) – представление о каком-либо частном сходстве двух объектов (существенном либо несущественном) [2].

Говоря о модели, нельзя не сказать о моделировании.

Моделирование – замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом (моделью) и познание свойств оригинала путем исследования свойств модели [5].

Моделирование – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания [2].

Моделирование – замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели [3].

Таким образом, можно считать, что *моделирование* – это построение (или выбор из уже существующих) модели, ее изучение и использование

с целью получения новых знаний об исследуемом объекте. Примем это определение в качестве базового.

1.2. Цели и принципы моделирования

Создавая модель объекта, исследователь познает объект, т. е. выделяет его из окружающей среды и строит его формальное описание.

Основные цели моделирования:

- описание объекта;
- объяснение объекта;
- прогнозирование поведения и свойств объекта.

Цели описания и объяснения объекта можно объединить в одну – изучение объекта (познавательная цель). Модель нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный исследуемый объект, каковы его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой [2]. Еще одна цель (прогнозирование поведения и свойств объекта) является частью стратегической цели – управлять объектом, определяя по модели оптимальные управляющие воздействия при заданных целях и критериях. Модель нужна и для того, чтобы прогнозировать последствия различных воздействий на объект.

В основе моделирования лежит *теория подобия*, согласно которой абсолютное подобие возможно только при замене одного объекта другим точно таким же. Эту идею хорошо выразили А. Розенблют и Н. Винер, когда сказали, что лучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше – тот же самый кот [2]. При моделировании абсолютное подобие не имеет места. Любая модель не тождественна объекту-оригиналу и не является полной, так как при ее построении исследователь учитывал только те особенности объекта, которые считал наиболее важными для решения конкретной задачи. Достаточно того, чтобы модель хорошо отражала интересующие исследователя свойства и проявления анализируемого объекта. Однако никто и ничто не может быть моделью самого себя.

Реальная польза от моделирования может быть получена при выполнении следующих условий:

- модель должна быть адекватной оригиналу в том смысле, что должна с достаточной точностью отображать интересующие исследователя характеристики оригинала;
- модель должна устранять проблемы, связанные с физическими измерениями каких-то сигналов или характеристик оригинала.

Моделирование базируется на нескольких основополагающих принципах [5]:

1. *Принцип информационной достаточности* – при полном отсутствии информации об объекте построение его модели невозможно. Существует некоторый уровень априорной информации об объекте, только при достижении которого может быть построена адекватная модель. При наличии полной информации об объекте построение его модели не имеет смысла.

2. *Принцип осуществимости* – создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля.

3. *Принцип множественности моделей* – создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реального объекта (системы), которые интересуют исследователя. Для полного исследования объекта необходимо достаточно большое количество моделей, отражающих исследуемый объект с разных сторон и с разной степенью детализации.

4. *Принцип агрегатирования* – в большинстве исследований систему целесообразно представить как совокупность подсистем, для описания которых оказываются пригодными стандартные схемы.

5. *Принцип параметризации* – модель строится в виде известной системы, параметры которой неизвестны.

1.3. Аксиомы теории моделирования

Ранее было уже сказано, что моделирование сегодня является самостоятельной областью знаний, отдельной наукой. Многие науки базируются на некотором наборе аксиом (утверждений, которые принимаются «на веру» и не требуют доказательств). Есть такие аксиомы и в моделировании [5].

Аксиома 1. Модель не существует сама по себе, а выступает в тандеме с некоторым материальным объектом, который она представляет (замещает) в процессе его изучения или проектирования.

Аксиома 2. Для естественных материальных объектов модель вторична, т. е. появляется как следствие изучения и описания этого объекта (например, модель солнечной системы). Для искусственных материальных объектов (создаваемых человеком или техникой) модель первична, так как предшествует появлению самого объекта (например, модель самолета, мо-

дель двигателя).

Аксиома 3. Модель всегда проще объекта. Она отражает только некоторые его свойства, а не представляет объект «во всем великолепии». Для одного объекта строится целый ряд моделей, отражающих его поведение или свойства с разных сторон или с разной степенью детальности. При бесконечном повышении качества модели она приближается к самому объекту. *Аксиома 4.* Модель должна быть подобна тому объекту, который она замещает, т. е. модель в определенном смысле является копией, аналогом объекта. Если в исследуемых ситуациях модель ведет себя так же, как и моделируемый объект, или это расхождение невелико и устраивает исследователя, то говорят, что модель *адекватна* оригиналу. *Адекватность* – это воспроизведение моделью с необходимой полнотой и точностью всех свойств объекта, существенных для целей данного исследования.

Аксиома 5. Построение модели не самоцель. Она строится для того, чтобы можно было экспериментировать не с самим объектом, а с более удобным для этих целей его представителем, называемым моделью.

1.4. Виды моделей и моделирования

Единой общепринятой классификации моделей и моделирования на сегодняшний день не существует. Данное пособие разработано для студентов специальности «Профессиональное обучение» и учитывает интегративность их профессиональной подготовки – педагогическую и техническую компоненты. Поэтому мы будем опираться на два наиболее полных и понятных педагогам профессионального обучения подхода к классификации моделей и моделирования [2, 3].

Модели характеризуются тремя основными признаками [4]:

- принадлежностью к определенному классу задач (например, управление технологическими процессами, управление техническими объектами, планово-экономические задачи и т. д.);
- принадлежностью к определенному классу объектов (физические, биологические и т. д.);
- способом реализации.

По способу реализации модели подразделяются на материальные и идеальные [2, 4]. К этому условному делению приводит использование моделирования на теоретическом и эмпирическом уровнях познания.

Материальное моделирование – это моделирование, при котором ис-

следование объекта выполняется с использованием его материального ана-

лога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические, функциональные характеристики объекта [2].

Идеальное моделирование отличается от материального тем, что основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслеобразной и всегда носит теоретический характер. Идеальное моделирование является первичным по отношению к материальному.

Материальные модели объединяются в три основных подкласса [4]:

- геометрически подобные, воспроизводящие пространственно геометрические характеристики оригинала (макеты зданий, муляжи и т. д.);
- воспроизводящие с масштабированием в пространстве и во времени свойства оригинала той же природы, что и модель (например, модели судов);
- воспроизводящие свойства оригинала в моделирующем объекте другой природы (например, электрогидравлические аналогии) или основанные на изоморфизме между формально описанными свойствами оригинала и объекта (все разновидности электронного моделирования).

Существует две основных разновидности *материального* моделирования: *натурное* и *аналоговое* моделирование. Оба вида основаны на свойствах геометрического или физического подобия. Теория подобия как раз и занимается изучением условий подобия явлений.

Натурное – это такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный аналог, допускающий исследование (в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и объектов на объект на основе теории подобия [1]. Примерами натуральных моделей являются макеты зданий, ландшафтов, судов, самолетов и т. д. В середине XIX в. с натуральных моделей моделирование начало развиваться как научная дисциплина, а сами модели стали активно использоваться при проектировании новых технических устройств.

Аналоговое – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально [1]. В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов. Примерами аналоговых моделей могут служить электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются совершенно оди-

наково, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам.

Идеальное моделирование разделяют на два основных типа: *интуитивное* и *научное* моделирование [2].

Интуитивное – моделирование, основанное на интуитивном (не обоснованном с позиций формальной логики) представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации или не нуждающемся в ней [2]. Примером интуитивной модели окружающего мира можно считать жизненный опыт любого человека, его умения и знания, полученные от предков. Роль интуитивных моделей в науке чрезвычайно высока.

Научное – это всегда логически обоснованное моделирование, использующее минимальное число предположений, принятых в качестве гипотез на основании наблюдения за объектом моделирования [2]. Главное отличие научного моделирования от интуитивного заключается не только в умении выполнять необходимые операции и действия по собственно моделированию, но и в знании «внутренних» механизмов, которые используются при этом.

Знаковым называют моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, наборы символов и т. д. Примерами таких моделей являются языки общения, алгоритмические языки, ноты для записи музыкальных произведений, математические формулы и т. д. Знаковая форма используется для передачи как научного, так и интуитивного знания.

Мысленный образ реального объекта, сложившийся в голове исследователя, в научной литературе называется *когнитивной* моделью. Создавая такую модель, исследователь часто упрощает объект, чтобы получить более лаконичное и компактное описание. Представление когнитивной модели на естественном языке называется *содержательной* моделью. В естественно-научных дисциплинах и технике содержательную модель часто называют *технической постановкой проблемы*.

По функциональному признаку и целям содержательные модели делятся на *описательные, объяснительные, прогностические*.

Описательная модель – это любое описание объекта.

Объяснительная модель отвечает на вопрос, почему что-либо происходит.

Прогностическая модель должна предсказывать поведение объекта.

Концептуальной моделью называется содержательная модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знаний, занимающихся изучением объекта моделирования.

Концептуальные модели бывают *логико-семантическими*, *структурно-функциональными* и *причинно-следственными*.

Логико-семантическая модель является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты.

При построении *структурно-функциональной* модели объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные подсистемы, связанные структурными отношениями. Для представления подобных моделей чаще всего применяют схемы, диаграммы, карты.

Причинно-следственная модель часто используется для объяснения и прогнозирования поведения объекта и бывает ориентирована, прежде всего, на выявление главных взаимосвязей между составными элементами изучаемого объекта, определение влияния изменения каких-либо факторов на состояние компонентов модели и на понимание того, как в целом будет функционировать модель и будет ли она адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров объекта.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью формальных или алгоритмических языков. К формальным относятся *математические* и *информационные* модели.

С общенаучной точки зрения *математическое* моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

С развитием вычислительной техники стали популярны *информационные* модели, представляющие, по существу, автоматизированные справочники, реализованные с помощью систем управления базами данных. Такие модели позволяют найти в базе данных информацию по запросу и не могут генерировать новое знание, отсутствующее в базе данных. В то же время использование информационных моделей в сочетании с весьма простыми математическими моделями (например, с применением регрессионного анализа) может привести к открытию новых закономерностей.

В работах по моделированию технических систем *материальное* моделирование называют *реальным* и конкретизируют иначе [3]. Видами реального моделирования технических систем и процессов являются *натурное* и *физическое* моделирование. К *натурному* моделированию относят научный эксперимент, комплексные испытания, производственный эксперимент. К *физическому* моделированию – моделирование в реальном мас-

штабе времени, моделирование в нереальном (измененном) масштабе времени. При реальном моделировании исследования могут выполняться на самом объекте, на его части или на его модели.

Моделирование может быть и *мысленным*. При мысленном моделировании исследования проводятся на мыслеобразных конструкциях. Мысленное моделирование делится на *наглядное*, *символическое* и *математическое*.

При *наглядном* моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. Видами наглядного моделирования являются *гипотетическое* и *аналоговое* моделирование и *макетирование*.

В основе *гипотетического* моделирования лежит некая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. *Гипотетическое* моделирование используется в тех случаях, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей (например, представление объекта исследований в виде «черного ящика»).

Аналоговое моделирование основывается на аналогиях различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов (например, чертеж, схема, график, план, описание какого-либо явления, процесса или предмета).

Мысленное макетирование применяется в тех случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию. Мысленное макетирование может предшествовать другим видам моделирования.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков, отображающих набор понятий (*знаковое* моделирование), и символов из специального словаря, очищенного от неоднозначности (*языковое* моделирование) (пример знаковой модели – дорожные знаки, языковой – модель словообразования).

Математическое моделирование будет рассмотрено нами отдельно и подробно далее.

Моделирование может быть *статическим* и *динамическим* [3]. *Ста-*

тическим называется моделирование, при котором среди параметров объ-

екта и модели отсутствует время и сами параметры объекта со временем не изменяются. При *динамическом* моделировании объект исследования и его параметры во времени существенно изменяются.

Моделирование может быть *детерминированным* и *стохастическим*. *Детерминированное* моделирование отображает детерминированные процессы, т. е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; *стохастическое* моделирование отображает вероятностные процессы и события.

Моделирование может быть *дискретным* и *непрерывным*. Модель дискретная, если она описывает поведение системы только в дискретные моменты времени. Модель непрерывная, если она описывает поведение системы для всех моментов времени из некоторого промежутка времени. Возможны комбинированные варианты.

Наконец, моделирование может быть *полным*, *неполным* и *приближенным*.

Полным называется моделирование, при котором достигается полное подобие исследуемого объекта и модели во времени и в пространстве.

Неполным называется моделирование, при котором реализуется неполное подобие исследуемого объекта и модели во времени и в пространстве.

Приближенным называется моделирование, при котором некоторые проявления исследуемого объекта не моделируются совсем.

1.5. Функции моделей

Принято выделять следующие функции моделей [7]:

- модель – средство осмысления действительности;
- модель – средство общения;
- модель – средство обучения и тренировки;
- модель – средство постановки эксперимента (компьютерный эксперимент).

1.6. Факторы, влияющие на модель объекта

Из изложенного выше понятно, что для любого объекта можно построить множество моделей. От чего зависит «характер» модели объекта? В первую очередь, от следующих факторов:

- 1) от объекта исследования (кого или что исследуем);

2) проблемы и задачи исследования (что хотим узнать об объекте);

3) априорной информации об объекте (что уже знаем об объекте исследования);

4) субъекта исследования (кто исследует объект);

5) от языка описания объекта (как исследуем и описываем объект).

1. Объект исследования

Объект исследования (от лат. *objectum* – предмет) – все то, на что направлена человеческая деятельность. Для моделирования и исследования объекта необходимо выделить его из окружающего внешнего мира, а также выявить все воздействия на объект со стороны других окружающих объектов и реакцию исследуемого объекта на эти воздействия.

Каждый объект до начала исследования имеет свою структуру, свои свойства и характеристики. В теории моделирования воздействие со стороны окружающего мира на объект при его исследовании называют *входным воздействием* и представляют в виде *входных факторов* (в математических моделях их называют входными переменными).

Поведение объекта и его проявления в окружающем мире, возникающие от внешнего воздействия, называют *откликом объекта* и представляют в виде *выходных факторов* (в математических моделях – выходных переменных).

Внешнее воздействие на объект можно разделить на *управляющее* и *возмущающее*. Под *возмущающим* обычно понимают воздействие на объект со стороны окружающей среды, параметры и закономерности которого случайным образом изменяются во времени и недоступны для измерения, контроля и тем более изменения в момент непосредственного исследования объекта. Под *управляющим* обычно понимают целенаправленное воздействие на исследуемый объект, параметры и закономерности которого могут быть измерены, проконтролированы и изменены по желанию субъекта в момент непосредственного исследования объекта.

Параметры *свойств* и *структуры* объекта могут быть известны (или определены) на момент начала исследования объекта и в дальнейшем изменяться под внешним воздействием, являясь объектами изучения.

Ранее было использовано понятие «фактор». В моделировании *фактор* – некоторая переменная величина, принимающая в каждый момент времени некоторое определенное значение из своей области определения и отражающая внешнее воздействие на объект или его отклик на это воздействие.

Тогда *входными факторами* можно считать свойства и структуру объекта до начала исследования, а также управляющее и возмущающее воздействие на объект в процессе его исследования; *выходными факторами* – свойства, структуру, поведение объекта, изменившиеся под влиянием входных факторов.

Все объекты имеют следующие характеристики:

- *сложность* – определяется количеством состояний, в которых может находиться объект (по этому параметру различают простые объекты, сложные объекты и большие системы);

- *управляемость* – способность объекта переходить из одного состояния в другое под воздействием извне и находиться в этом состоянии с заданной точностью заданный промежуток времени;

- *степень воспроизводимости результатов* – если наблюдать объект в одном и том же состоянии в различные моменты времени, то разница в наблюдениях не должна превышать некоторого заданного значения (точности измерения).

2. Проблема и задача исследования

В моделировании различают понятия «*проблема*» и «*задача*».

Проблема – разновидность вопроса, имеющая четко поставленную цель, но пути достижения этой цели в данный момент времени могут быть неизвестны.

Задача – разновидность вопроса, имеющая четко поставленную цель и известные пути достижения этой цели.

Рассмотрим классификации задач.

1. По поставленному вопросу:

- *прямые задачи* (отвечают на вопрос: «Какими будут поведение и проявления исследуемого объекта, если известны внешнее воздействие, структура и свойства объекта?»);

- *обратные задачи* (отвечают на вопросы: «Какими должны быть структура и свойства объекта, если при известном внешнем воздействии известны поведение и проявления объекта?» и «Каким должно быть внешнее воздействие на объект, если известны структура и свойства объекта, поведение и проявления объекта?»).

2. По количеству шагов решения:

- *одношаговые* (очень простые) задачи;
- *многошаговые* задачи.

3. По условиям:

- детерминированные задачи;
- стохастические задачи.

4. По количеству выходных переменных (факторов):

- однокритериальные задачи;
- многокритериальные задачи.

3. *Априорная информация об объекте*

Информация (от лат. *information* – разъяснение, изложение) включает в себя какие-либо сведения и является объектом информационных технологий.

Различают два вида информации: *знания* и *данные*.

Знания – информация, на основании которой реализуется процесс логического вывода (философское знание о жизнедеятельности человека).

Данные – информация, представленная в формализованном виде, пригодном для обработки автоматическими средствами при возможном участии человека (как правило, данные – это зарегистрированные сигналы).

Можно сказать, что *информация* – это продукт взаимодействия данных и адекватных методов их преобразования [6].

Выделяют следующие особенности информации:

- динамический характер (информация меняется и существует только в момент взаимодействия данных и методов; информация существует только в момент протекания информационных процессов; все остальное время информация существует только в виде данных);

- диалектический характер взаимодействия данных и методов (информация возникает и существует в момент взаимодействия объективных данных и субъективных методов).

Рассмотрим классификации информации.

1. По области получения и использования:

- научная (логическая) информация – физическая, биологическая, химическая и др. (т. е. объективно существующая);
- техническая информация – конструкторская, технологическая, плано-экономическая, управленческая (т. е. созданная человеком).

2. По назначению:

- массовая информация;
- специальная информация.

3. По форме хранения и типу носителя:

- информация, представленная в машинном (цифровом) виде;
- информация, представленная в виде документа (на бумажном или другом подобном носителе).

Наиболее важными свойствами информации считаются [6]:

- объективность и субъективность;
- полнота;
- достоверность;
- адекватность;
- доступность;
- актуальность.

В моделировании эти свойства можно рассматривать как требования к априорной информации.

4. *Субъект исследования (моделирования)*

Совершенно очевидно, что субъектом моделирования является только человек¹.

5. *Язык описания объекта*

Язык описания объекта соответствует виду моделирования, который выбирается исследователем (субъектом моделирования).

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое модель?
2. Что такое объект?
3. Что такое процесс?
4. Что такое система?
5. Что такое элемент системы?
6. Что такое окружающая среда?
7. Что такое гипотеза?
8. Что такое аналогия?
9. Что такое моделирование?
10. Обозначьте цели моделирования.
11. Назовите принципы моделирования.
12. Перечислите аксиомы моделирования.

¹ Примеры применения моделирования рассмотрены в кн.: Дулов В. Г. Математическое моделирование в современном естествознании. СПб., 2001. 244 с.

13. Какие виды моделей существуют?
14. Какие виды моделирования существуют?
15. Что такое материальное моделирование?
16. Что такое мысленное моделирование?
17. Какие функции выполняют модели?
18. От чего зависит модель объекта?
19. Что такое фактор, уровень фактора?
20. Что такое сложность объекта?
21. Что такое задача?
22. Что такое проблема?
23. Что такое информация? Назовите виды информации.

Глава 2. Математическое моделирование

2.1. Основные понятия и определения

С общих позиций математическое моделирование можно рассматривать как один из методов познания реального мира в период формирования так называемого информационного общества [7]. Центральное понятие данной темы – понятие математической модели, которое, как и ряд других понятий математического моделирования, не имеет строгого формального определения [7, 8]. В литературе по моделированию предлагаются следующие варианты:

- под *математической моделью* понимается класс абстрактных и символьных математических объектов – таких, как числа и вектора, и отношения между ними [9];

- *математической моделью* объекта называют совокупность абстрактных основополагающих математических понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта [8];

- под *математической моделью* понимается любой оператор A , позволяющий по соответствующим значениям входных параметров X установить выходные значения параметров Y объекта моделирования [2].

Таким образом, *математическая модель* – совокупность математических объектов (уравнений, систем уравнений и неравенств, алгебраиче-

ских выражений и т. д.), описывающих языком математических символов исследуемый объект и его отношения с окружающим миром. Это определение мы и примем за базовое в данной работе.

Под *математическим моделированием* будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта [3].

Особенность *математического моделирования* состоит в том, что абстрактным отражением существующего или создаваемого объекта является его математическая модель, количественный анализ которой позволяет получить новые знания об этом объекте [7, 8].

Под *математическим моделированием* в технике понимают адекватную замену исследуемого технического устройства или процесса соответствующей математической моделью и ее последующее изучение методами вычислительной математики с привлечением средств современной вычислительной техники [8].

То есть *математическое моделирование* – это построение математической модели (или выбор имеющейся «модели-заготовки»), ее исследование с целью получения новой информации об объекте и использование для описания свойств и предсказания поведения объекта.

Математическое моделирование основано на том факте, что различные объекты и явления могут иметь одинаковое математическое описание. Говоря простым языком, *математическая модель* – это совокупность наших знаний об исследуемом объекте, сформулированных на языке математики.

Однако следует помнить, что наши знания об исследуемом объекте никогда не бывают абсолютными. Следовательно, математическая модель, как и любая другая модель, всегда является только копией объекта и описывает его приближенно.

Можно назвать следующие преимущества математического моделирования по сравнению с натурным экспериментом [2]:

- экономичность (сбережение материальных, человеческих, временных и финансовых ресурсов);
- возможность моделирования гипотетических объектов;

- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;
- возможность изменения масштаба времени;
- простота многоаспектного анализа;
- возможность построения прогнозов на основе выявления общих закономерностей;
- наличие и универсальность технического и программного обеспечения для моделирования.

2.2. Требования к математической модели

Создание математических моделей является главным направлением современного процесса математизации наук (естественных, технических, гуманитарных). Выше было сказано, что для любого объекта можно построить множество моделей, в том числе и математических. Чтобы математическую модель можно было использовать для исследования реального объекта, она должна удовлетворять следующим требованиям [4]:

- быть практически полезной;
- быть адекватной реальному объекту;
- быть адекватной решаемым задачам.

Анализ использования моделирования многочисленными исследователями позволяет говорить о том, что математическая модель также должна отвечать следующим требованиям:

- быть простой в содержательном смысле и легко интерпретируемой;
- быть «адаптированной» к имеющимся исходным данным об объекте и легко модифицироваться при появлении новых данных;
- быть полной с точки зрения решаемых задач;
- быть ориентированной на психологию пользователя, простой и понятной ему;
- гарантировать отсутствие абсурдных результатов.

2.3. Структура математической модели

Математическая модель представляет собой комбинацию следующих элементов:

- переменных (входных и выходных) – всегда имеют область определения;
- параметров – принимают числовые значения;

- функциональных зависимостей;
- ограничений (искусственных и естественных);
- целевых функций (в задачах оптимизации).

2.4. Классификация математических моделей

Анализ литературных источников по моделированию позволяет классифицировать математические модели по следующим признакам [2]:

1. Сложность объекта моделирования.
2. Оператор моделирования (подмодель).
3. Входные и выходные параметры модели.
4. Цели моделирования.
5. Метод реализации модели.

1. Сложность объекта

Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые объекты и объекты-системы. При моделировании простых объектов не рассматривается внутренне строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы. Простым объектом, например, является материальная точка в классической механике. Для сложных систем характерно наличие большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих элементов. Их поведение многовариантно. При моделировании объектов-систем возникают большие трудности. Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются *структурными* моделями.

2. Оператор модели

Оператор модели определяется совокупностью уравнений. Если оператор обеспечивает линейную зависимость выходных факторов от входных, то математическая модель называется *линейной*. В противном случае модель называется *нелинейной*.

3. Параметры модели

В зависимости от вида используемых множеств параметров модели делятся на *качественные* и *количественные*, *дискретные* и *непрерывные*, *смешанные*.

4. Цели моделирования

В зависимости от цели моделирования выделяют *дискриптивные*, *оптимизационные*, *управленческие* модели.

Целью *дискриптивных* моделей является установление законов изменения параметров модели. *Оптимизационные* модели предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров объекта и технологических режимов. *Управленческие* модели применяются для принятия эффективных управленческих решений.

5. Метод реализации модели

В зависимости от метода реализации выделяют *аналитические* и *алгоритмические* математические модели. Метод является *аналитическим*, если он позволяет получить выходные факторы в виде аналитических выражений. Аналитические методы бывают *алгебраическими* и *приближенными*. В *алгоритмических* моделях математические соотношения для объекта исследования заменяются алгоритмом. Алгоритмические модели бывают *численными* и *имитационными*.

При моделировании технических систем и процессов классификация математических моделей приобретает дополнительные признаки [4]:

- по этапам жизненного цикла создания объекта выделяют модели *анализа*, модели *проектирования*, модели *внедрения* и т. д.;
- по уровню формализации модели можно выделить *концептуальную* модель (для пользователя и аналитика), *формализованное*, или *алгоритмическое*, описание и *программу-имитатор*;
- по методам построения различают модели, созданные с помощью *аналитических* и *статистических* методов.

В основе *аналитических* моделей процессов лежат фундаментальные законы тепло- и массопереноса, выраженные в виде функциональных соотношений (алгебраических, интегрально-дифференциальных, конечно-разностных и т. д.). Поэтому аналитические модели описывают и раскрывают сущность процессов и явлений, протекающих в исследуемом объекте и определяющих его свойства и поведение. Методы исследования аналитических моделей: *аналитические* (получают общее решение в явном виде и подставляют в него значения граничных и начальных условий) и *численные* (общие решения в явном виде заменяются приближенными). В качестве примера аналитических моделей можно назвать дифференциальные уравнения.

В основе *статистических* моделей лежат результаты экспериментального исследования объекта. Поэтому эти модели также называют

эмпирическими, идентифицируемыми, вероятностно-статистическими, опыт-но-статистическими. Статистические модели рассматривают исследуемый

объект как «черный ящик» и не раскрывают сущность процессов и явлений, протекающих в нем, – они просто отражают одну из возможных зависимостей выходных переменных от входных, т. е. носят частный характер в отличие от аналитических моделей, которые имеют более общий характер. Примеры эмпирических моделей – корреляционные, регрессионные модели.

2.5. Цели математического моделирования для технических объектов и технологических процессов

Ранее нами уже были подробно изложены общие цели моделирования. С учетом специфики технических объектов и технологических процессов машиностроительного производства имеет смысл их конкретизировать и обозначить цели моделирования следующим образом[4]:

1. Помочь при решении задач стратегического и тактического управления. Существует иерархия задач управления технологическими процессами и комплексами. На верхнем уровне решаются задачи стратегического планирования и управления. На нижних уровнях – тактические задачи календарного планирования и текущего управления. Этой иерархии задач соответствует иерархия математических моделей.

2. Заменить недопустимые на реальном техническом объекте опыты экспериментами на его модели.

Опыты на реальном объекте заменяются компьютерными (вычислительными) экспериментами, что позволяет существенно повысить качество принимаемых инженерных и управленческих решений, снизить сроки и затраты на достижение оптимальных результатов.

3. Свести исследование реального объекта к решению математической задачи.

Имеющееся в настоящее время математическое, программное, компьютерное обеспечение позволяет смоделировать и исследовать большое количество вариантов решаемой задачи, выбрать и обосновать наиболее целесообразное решение.

4. Получить эффективный инструмент исследования сложных систем и процессов.

Математическое моделирование позволяет рассмотреть ряд одновременно протекающих в системе процессов и выбрать оптимальный ин-

струмент их исследования.

5. Обобщить знания, накопленные об объекте.

Модели служат как бы аккумуляторами знаний об объектах и выполняют особую смыслообразующую роль в системе научно-технических знаний.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое математическая модель?
2. Что такое математическое моделирование?
3. Из чего состоит математическая модель?
4. Каковы цели математического моделирования?
5. Назовите виды математических моделей.
6. Что такое аналитическая модель?
7. Что такое эмпирическая модель?
8. Обозначьте преимущества математического моделирования.
9. На чем основано математическое моделирование?
10. Перечислите требования, предъявляемые к математической модели.

Глава 3. Алгоритм построения модели

3.1. Технологии моделирования

Ранее мы рассмотрели принципы моделирования (принцип информационной достаточности, принцип осуществимости, принцип множественности моделей объекта, принцип агрегатирования, принцип параметризации). Степень реализации этих принципов в каждой конкретной модели может быть различной, что в значительной степени зависит от соблюдения исследователем (субъектом моделирования) технологии моделирования.

Технологии комплексного моделирования представляют собой последовательность следующих действий [5]:

- 1) определение цели моделирования;
- 2) разработка концептуальной модели;
- 3) формализация модели;
- 4) программная реализация модели;
- 5) планирование модельных экспериментов;
- 6) реализация плана эксперимента;
- 7) анализ и интерпретация результатов моделирования.

Соответственно, общая схема моделирования имеет следующий вид [4]:

- 1) проблема;
- 2) постановка задачи;
- 3) описание исходных данных;
- 4) формализация задачи, выбор временной и пространственной шкал модели;
- 5) выбор метода построения модели;
- 6) планирование эксперимента;
- 7) получение и обработка экспериментальных данных;
- 8) идентификация неизвестных характеристик модели;
- 9) выбор метода решения задачи;
- 10) вычислительный эксперимент;
- 11) анализ и интерпретация результатов моделирования;
- 12) принятие решений об использовании результатов;
- 13) практическое использование модели.

Для прикладного использования в моделировании технологических процессов представляется целесообразным рассмотреть отдельно алгоритмы построения аналитической и эмпирической моделей.

3.2. Алгоритм построения аналитической модели

1. Выявление противоречия и формулирование проблемы.
2. Определение объекта исследования. Постановка задачи (задач) исследования.
3. Анализ априорной информации. Формулирование гипотезы исследования.
4. Выбор входных и выходных факторов.
5. Формализация задачи.
6. Построение модели.
7. Планирование и проведение эксперимента.
8. Интерпретация результатов моделирования.
9. Оценка пригодности модели.
10. Решение задачи оптимизации (если таковая имеется).
11. Использование модели. Документирование результатов.

3.3. Алгоритм построения эмпирической модели

1. Выявление противоречия и формулирование проблемы.
2. Определение объекта исследования. Постановка задачи (задач) исследования.

3. Анализ априорной информации. Формулирование гипотезы исследования.

4. Выбор входных и выходных факторов.

5. Формализация задачи.

6. Планирование и проведение эксперимента.

7. Обработка результатов эксперимента.

8. Построение модели.

9. Проверка адекватности модели.

10. Интерпретация результатов моделирования.

11. Оценка пригодности модели.

12. Решение задачи оптимизации (если таковая имеется).

13. Использование модели. Документирование результатов.

Различия алгоритмов начинаются с шестого этапа и объясняются различиями в методах построения модели (см. об этом выше).

3.4. Краткая характеристика основных этапов алгоритмов построения аналитических и эмпирических моделей

Этап выявления противоречия и формулирования проблемы

Данный этап моделирования является первым и самым ответственным. От правильности формулирования проблемы исследования зависят результаты моделирования и затраты (материальные, финансовые, временные) на моделирование и исследование объекта. Однако не стоит к результатам, полученным в финале этого этапа, относиться как к догме: в ходе моделирования формулировка и содержание проблемы часто корректируются, уточняются. К тому же на всех последующих этапах построения модели возможно возвращение к самому началу работы с целью лучшего понимания исследуемой проблемы.

Этап определения объекта исследования и постановки задачи (задач)

На этом этапе проблему необходимо «раздробить»: выделить задачи, четко их сформулировать и определить стратегию и тактику решения каждой из них. Все задачи исследования должны быть хорошо структурируемыми – это позволит быстрее найти пути их решения. Очень важно также правильно и корректно поставить вопрос в каждой задаче (задача может быть прямой или обратной – см. об этом выше) и определить ее приоритет и место в общем списке решаемых задач.

Этап анализа априорной информации, формулирования гипотезы исследования

Анализ априорной информации базируется на изучении уже имеющихся результатов исследования подобных объектов и решения подобных задач другими исследователями и выявлении аналогов с целью повышения эффективности собственного исследования. Источниками априорной информации являются отчеты по научно-исследовательской работе, книги, периодические издания, материалы конференций, информационные ресурсы Интернета.

Результаты анализа априорной информации должны быть следующими:

- четкое уяснение сути собственного исследования и возможных методов его проведения;
- осмысление причин удач и неудач предшествующих исследователей;
- предварительный выбор входных и выходных факторов и их обозначений;
- выбор метода построения и исследования модели;
- формулирование гипотезы о возможном характере математической модели.

Этап выбора входных и выходных факторов

Фактор – измеряемая переменная величина, принимающая в каждый момент времени некоторое определенное значение из своей области определения.

При моделировании технологических процессов можно сформулировать следующие требования к входным факторам:

- они должны быть взаимно независимыми;
- количественными и сравнительно легко измеряемыми;
- простыми и иметь физический смысл;
- они должны быть универсальными и полными с точки зрения описания свойств и структуры исследуемого объекта;

Выходной фактор должен быть однозначным (в статистическом смысле этого слова).

В обратных задачах (задачах оптимизации) выходной фактор часто называют критерием оптимизации.

Выделяют следующие виды критериев оптимизации:

- экономические критерии оптимизации: прибыль, себестоимость, затраты;

- технический (или технологический) – производительность;

- технико-экономические: безотказность, восстанавливаемость и т. д.;
- прочие критерии оптимизации: экологические, эргономические, эстетические и т. д.

В технологических процессах машиностроения критериями оптимизации могут быть стойкость режущего инструмента, точность базирования, точность и шероховатость обработанных поверхностей, сила и температура резания и т. д.

Если фактор не имеет количественного измерения (например, носит качественный характер), можно использовать *ранжирование*.

Ранг – субъективная количественная оценка качественного фактора, измеренная по заранее выбранной шкале и не имеющая физической размерности.

Этап формализации задачи

Современный математический аппарат требует, чтобы для решения задача была поставлена формально, т. е. в виде математической формулы. Следовательно, необходим переход от *вербального описания* априорной информации об объекте (схемы, текста, таблицы, графика и пр.) к *количественным соотношениям* между выходными и входными факторами (а в модели – переменными).

Под формализацией будем понимать «перевод» задачи исследования и априорной информации об объекте с языка вербального описания на язык математического описания.

Формализация позволяет повысить качество и скорость решения задач моделирования объектов и процессов (так как в абсолютном большинстве случаев используется уже разработанное математическое и программное обеспечение, например, MATHLAB, MATHCAD, MAPLE, STATISTICA, STSTGRAPHICS и др.)

Этап построения модели

При построении аналитической модели можно использовать «*модели-заготовки*» – в них подставляют конкретные граничные и начальные условия для решения поставленной задачи.

При построении эмпирической модели сначала нужно провести эксперимент. Затем результаты экспериментальных исследований обрабатываются математическим аппаратом статистического анализа (регрессионного, дисперсионного, корреляционного и т. д.). Построение регрессионных моделей будет рассмотрено нами далее.

Этап планирования и проведения эксперимента

Основой планирования эксперимента является *теория планирования факторного эксперимента*, позволяющая определить необходимое и достаточное количество опытов эксперимента. В алгоритме построения эмпирической модели этот этап обязательно предшествует построению модели. В алгоритме построения аналитической модели планирование и проведение эксперимента осуществляется после построения модели и выполняется для оценки точности аналитической модели. При построении аналитических моделей нередки случаи, когда для проверки точности разрабатываемой модели объекта используются экспериментальные данные, полученные другими исследователями в другом месте и в другое время.

При планировании эксперимента определяются окончательное количество самих входных факторов и количество их уровней.

Уровень фактора – конкретное значение фактора из его области определения при экспериментальном исследовании объекта.

Совокупность уровней входных факторов объекта (по одному уровню от фактора) определяет одно состояние объекта.

Если число уровней всех входных факторов одинаково, то число всех состояний объекта (N_c) можно определить по формуле

$$N_c = p^k,$$

где k – общее количество входных факторов;

p – число уровней каждого фактора.

Цель планирования эксперимента – определить количество факторов и их уровней для получения необходимой и достаточной информации об объекте исследования.

Подробно вопросы планирования эксперимента будут рассмотрены нами далее.

Этап проверки адекватности модели (для эмпирических моделей)

Адекватность (от лат. *adaequatus* – приравненный [2]) модели характеризует ее соответствие экспериментальным данным. Проверка осуществляется по специальным критериям (см. об этом далее).

Этап интерпретации результатов моделирования

Интерпретация – «перевод» для пользователя результатов моделирования исследуемого объекта с языка математики на язык вербального описания (в схемы, графики, таблицы и т. д.).

На этапе интерпретации оценивается, насколько результаты моделирования (в частности, модель) соответствуют здравому смыслу и существующей информации о поведении и свойствах объекта.

Этап решения задачи оптимизации

Задачи оптимизации – одни из наиболее распространенных научно-технических задач. Они возникают в тот момент, когда установлена возможность осуществления процесса и требуется найти наилучшие (оптимальные) условия его реализации. Всегда необходимо четко формулировать, в каком смысле условия должны быть оптимальными. Это влияет на выбор целей исследования. Выше были рассмотрены прямые и обратные задачи. Обратные задачи по своей сути и являются задачами оптимизации.

При решении задачи оптимизации необходимо выбрать метод поиска оптимального решения в зависимости от особенностей исследуемого объекта, модели и решаемой задачи и применить его для получения «наилучших» характеристик или вариантов поведения объекта или воздействия на него.

Этап использования модели и документирования результатов

После получения и проверки модели для ее дальнейшего использования необходимо оформить результаты моделирования.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные этапы алгоритма построения аналитической модели.
2. Назовите основные этапы алгоритма построения эмпирической модели.
3. Расскажите о различиях в алгоритмах построения аналитической и эмпирической моделей.
4. Назовите источники априорной информации.
5. Что является результатом анализа априорной информации?
6. Какие требования предъявляются к входным и выходным факторам?
7. Что такое критерий оптимизации? Перечислите виды критериев оптимизации.
8. Что такое ранг?
9. Что такое формализация?
10. Что такое интерпретация?

Раздел 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Глава 4. Планирование и проведение эксперимента

4.1. Основные понятия и определения

Человек экспериментирует везде и всегда. И естественным (хотя и противоречивым) является желание проводить эксперимент в наиболее короткий срок с наименьшими затратами, получая при этом достоверную и точную информацию.

С общефилософской точки зрения *эксперимент* (от лат. *experimentum* – проба, опыт) – это чувственно-предметная деятельность в науке, в более узком смысле слова – опыт, воспроизведение объекта познания, проверка гипотез и т. д. [10]. Большинство научных исследований связано с экспериментом – физическим, психологическим или модельным. В последнее время наряду с физическими моделями все больше используются компьютерные, на которых можно производить имитационные эксперименты и получать новые сведения об объекте.

При исследовании простых объектов достаточно проведения однофакторного эксперимента. Ранее считалось, что опыт должен быть чистым, т. е. все посторонние влияния исключены. Объект рассматривали изолированно от других, без обратных связей и сложных взаимодействий.

С усложнением объекта исследования появилась потребность в оптимизации экспериментальных исследований. Эксперимент сам стал объектом исследования, и объектом очень сложным.

В технической литературе эксперимент определяется следующим образом: *эксперимент* – это система операций, воздействий или наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования [10].

Хотя объекты исследований очень разнообразны, все методы экспериментальных исследований имеют много общего:

- каким бы простым ни казался эксперимент, исследователи всегда начинают с его планирования;
- исследователи всегда стремятся сократить число исследуемых входных факторов, чтобы уменьшить объем эксперимента;
- исследователи всегда стараются контролировать ход эксперимента и исключить влияние случайных внешних факторов.

Планирование эксперимента – раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений и наблюдений [4]. Планирование эксперимента состоит в процедуре выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для исследования объекта с заданной точностью. Планирование эксперимента обеспечивает [10, 11]:

- одновременное варьирование всех факторов по специальным правилам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов;
- минимизацию числа опытов, ресурсов (финансовых, временных, материальных, человеческих).

В основе построения эмпирических моделей лежит *теория многофакторного эксперимента* (МФЭ), разработанная Р. Фишером в 30-е гг. XX в., которая опирается на изучение состояния и поведения объекта при одновременном изменении нескольких входных факторов.

Ранее мы уже говорили, что любой объект может находиться в бесконечно большом количестве состояний. Исходя из этого, эксперимент можно рассматривать как реализацию всех или части состояний, в которых может находиться объект.

В теории многофакторного эксперимента сам эксперимент понимается как совокупность опытов.

Опыт – воспроизведение исследуемого объекта в строго определенных условиях при возможности регистрации результатов.

По форме проведения и представления результатов эксперименты бывают *качественными* и *количественными* [10].

Качественный эксперимент устанавливает сам факт наличия объекта, процесса или явления, но при этом не дает никаких количественных характеристик.

Количественный эксперимент не только фиксирует сам факт существования того или иного объекта, процесса или явления, но и позволяет установить соотношение между количественными характеристиками поведения исследуемого объекта и количественными характеристиками внешнего воздействия.

Ранее нами уже были введены понятия «*фактор*» и «*уровень фактора*». Вспомним их.

Фактор – некоторая переменная величина, принимающая в каждый момент времени определенное значение из своей области определения и оказывающая внешнее воздействие на объект или его отклик на это воздействие. **Уровень фактора** – конкретное значение фактора из его области определения при экспериментальном исследовании объекта.

При проведении опытов очень важно, может ли исследователь во время опытов устанавливать те уровни факторов, которые представляют для него интерес. С этой точки зрения различают следующие факторы [10]:

- *контролируемые и управляемые* – это факторы, для которых можно не только зарегистрировать их уровень, но и задать в каждом опыте любое возможное значение;
- *контролируемые, но не управляемые* – это факторы, уровни которых можно только регистрировать, но задавать в каждом опыте определенное значение практически невозможно;
- *неконтролируемые* – это факторы, уровни которых не регистрируются исследователем, он даже может не подозревать об их существовании.

Если исследователь имеет возможность контролировать и управлять уровнями факторов, то такой эксперимент можно назвать *активным*. Если исследователь может только наблюдать и регистрировать, но не имеет возможности управлять уровнями факторов, то это *пассивный* эксперимент.

Во время экспериментального исследования объект рассматривается как «черный ящик» (рис. 4.1).

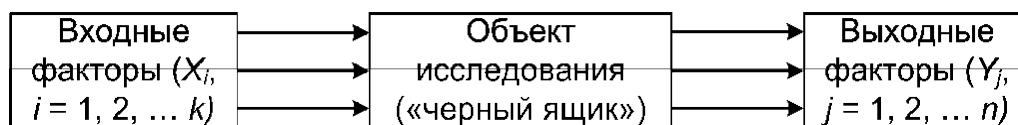


Рис. 4.1. Объект исследования в общем виде

Выходные факторы в эксперименте еще называют откликом, а зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$, которую пытаются установить, – *функцией отклика*.

4.2. Планирование эксперимента

4.2.1. Выбор уровней факторов

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Ранее было сказано, что каждый фактор имеет свою область определения. Совокупность областей определения входных факторов назовем

факторным пространством. Каждая точка факторного пространства представляет собой вполне определенное сочетание конкретных значений входных факторов и соответствует одному состоянию объекта. На основе анализа задачи исследования и априорной информации об исследуемом объекте для каждого входного фактора выделяется область, в пределах которой он будет изменяться во время эксперимента. Сочетание таких областей по всем входным факторам будем называть *факторным пространством эксперимента*.

Планирование эксперимента начинают с выбора *нулевого уровня* каждого входного фактора, в качестве которого может быть взята любая точка факторного пространства эксперимента. Но одной точки – нулевого уровня – для проведения эксперимента и получения необходимой информации недостаточно. Нужны еще точки. Построение плана эксперимента – это выбор точек (уровней входных факторов) относительно нулевого.

Для определения других уровней входных факторов вводится *интервал варьирования* каждого входного фактора. Чтобы обозначить *верхний уровень* входного фактора, следует интервал варьирования прибавить к нулевому уровню данного фактора, а чтобы определить *нижний уровень* – вычесть интервал варьирования из нулевого уровня. На интервал варьирования накладываются ограничения естественного характера снизу и сверху.

К интервалу варьирования входного фактора предъявляются следующие требования:

- он не может быть менее ошибки, с которой измеряется данный фактор, иначе уровни фактора будут неразличимы;
- он не может быть слишком большим, т. е. нижние и верхние уровни не должны покидать области определения фактора и области проведения эксперимента.

Обычно при первичном планировании эксперимента количество уровней по всем входным факторам выбирают одинаковым. Тогда количество опытов в эксперименте (N_3) может быть определено по формуле

$$N_3 = p_3^{k_3}, \quad (4.1)$$

где p_3 – число уровней каждого входного фактора;

k_3 – число входных факторов, исследуемых в эксперименте.

Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая

зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ является линейной, то достаточно реали-

зовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет в эксперименте только два уровня, т. е.

$$N_3 = 2^{k_3}. \quad (4.2)$$

Такой план эксперимента называется *планом первого порядка*. Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ является нелинейной, то достаточно реализовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет три уровня. Такой план называется *планом второго порядка*, а

$$N_3 = 3^{k_3}. \quad (4.3)$$

4.2.2. Полный факторный эксперимент

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания всех уровней всех входных факторов [4] (например, $N_3 = 2^{k_3}$, $N_3 = 3^{k_3}$).

Условия полного факторного эксперимента записывают в виде таблицы – *матрицы планирования* эксперимента. Для эксперимента, исследующего объект с двумя входными факторами, каждый из которых изменяется по двум уровням, матрица планирования имеет следующий вид (таблица).

Матрица планирования полного факторного эксперимента $N_3 = 2^2$

№ п/п	X_1	X_2	$Y_{\text{эксп}}$
1	–	–	$Y_{1\text{эксп}}$
2	–	+	$Y_{2\text{эксп}}$
3	+	–	$Y_{3\text{эксп}}$
4	+	+	$Y_{4\text{эксп}}$

Примечание. Знаком «+» обозначены верхние уровни факторов, знаком «–» – нижние.

Так выглядит кодированная форма записи.

Если для исследования входного фактора было выбрано три уровня, включая нулевой, то в матрице планирования они обозначаются знаками «–» (нижний), «0» (нулевой), «+» (верхний). На рис. 4.2 показана геомет-

рическая интерпретация полного факторного эксперимента $N = 2^2$. Если выбрано два нижних и два верхних уровня, то они обозначаются как «-2» (второй нижний), «-1» (первый нижний), «+1» (первый верхний) и «+2» (второй верхний).

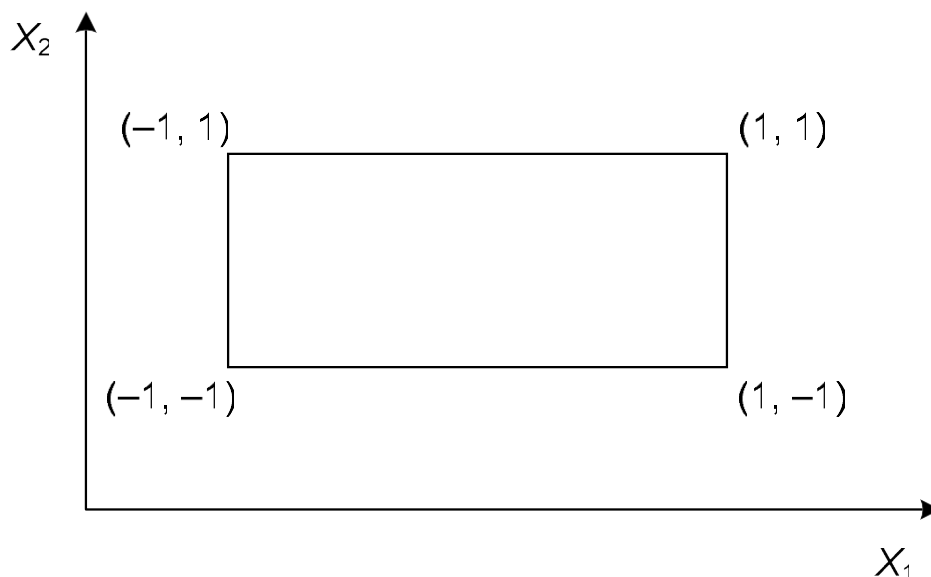


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента $N = 2^2$

Независимо от числа факторов матрицы ПФЭ обладают следующими общими свойствами [4]:

- *симметричность относительно центра эксперимента* – алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю;
- *условие нормировки* – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов;
- *ортогональность* – сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю;
- *ротатабельность* – точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказаний значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Полный факторный эксперимент страдает избыточностью опытов. Если анализ априорной информации дает основания полагать, что в выбранной области эксперимента объект описывается линейной моделью, то количество опытов можно минимизировать, сократив

матрицу планирования

эксперимента. Такой эксперимент называется *дробным факторным экспериментом* (ДФЭ), а таблица его плана – *дробной репликой* [4, 10, 11, 13 и др]. Уменьшение числа опытов позволяет снизить затраты времени, средств, материалов на проведение и обработку эксперимента.

4.3. Проведение эксперимента

Перед проведением эксперимента необходимо выяснить следующее:

1) можно ли установить выбранные уровни входных факторов на используемом для эксперимента оборудовании и удерживать их во время опыта;

2) возможно ли возникновение негативных последствий от реализации выбранных сочетаний уровней факторов;

3) возможно ли проведение параллельных опытов во время эксперимента;

4) когда были проверены и откалиброваны измерительные приборы.

Параллельными называются опыты, в которых уровни факторов повторяются. Рекомендуется повторять эксперименты не менее трех раз. Проведение параллельных опытов дает возможность сделать более надежными оценки влияния входных факторов на выходной фактор и выполнить расчеты статистических характеристик.

После составления матрицы планирования необходимо произвести рандомизацию опытов.

Рандомизация (от англ. *random* – случайный) – введение случайной последовательности проведения опытов.

Цель рандомизации – исключение появления и влияния систематических ошибок на результаты эксперимента.

Опыты необходимо рандомизировать во времени.

Для генерирования случайной последовательности опытов можно использовать программы-генераторы случайных чисел. Выбранную случайным образом последовательность опытов нарушать не рекомендуется.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется *экстремальным*. Если не ставится задача оптимизации, а требуется установить только количественную связь между входными и выходными факторами, то такой эксперимент часто называют *интерполяционным*.

После проведения эксперимента следует тщательно проанализировать полученные результаты. Если среди результатов измерений выходно-

го фактора одно-два-три резко отличаются от остальных, то следует проверить, не являются ли они грубыми выбросами, которые подлежат исключению¹.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое эксперимент?
2. Что такое планирование эксперимента?
3. Обозначьте цели планирования эксперимента.
4. Что такое опыт?
5. Какие виды экспериментов существуют?
6. Что такое план эксперимента?
7. Что такое нулевой уровень фактора? Как он выбирается?
8. Что такое интервал варьирования? Как он выбирается?
9. Что такое полный факторный эксперимент?
10. Что такое матрица планирования эксперимента?
11. Назовите свойства матрицы полного факторного эксперимента.
12. Что такое дробная реплика?
13. Что такое рандомизация? Какова цель проведения рандомизации?
14. Что такое экстремальный эксперимент?
15. Что такое интерполяционный эксперимент?

Глава 5. Регрессионные модели с одной входной переменной

5.1. Основные понятия

Технологические процессы машиностроительного производства, особенно процессы обработки резанием конструкционных материалов, очень сложны по своей физико-химической природе. До сих пор отсутствуют принятые всеми аналитические модели, точно описывающие закономерности процессов изнашивания и нагружения инструмента, тепловых процессов в зоне резания и т. д. Поэтому в технологии машиностроения очень часто используют модели, которые мы ранее обозначили как эмпи-

¹ Методика отсеивания грубых выбросов по таблицам критических разностей рассмотрена в кн.: *Рогов В. А. Методика и практика технических экспериментов: учеб. пособие. М., 2005. 288 с.*

рические. Эмпирические модели объектов и процессов представляют собой результат обработки экспериментальных данных о поведении объекта или процесса методами математического статистического анализа. Очень часто для построения моделей объектов по результатам экспериментальных исследований используют математический аппарат регрессионного и корреляционного анализа.

Термины «*регрессия*» и «*корреляция*» были введены в широкое употребление статистиками Ф. Гальтоном и К. Пирсоном в конце XIX в. Они изучали взаимозависимости роста и массы людей разного возраста и столкнулись с необходимостью введения таких показателей указанной зависимости, которые бы отражали связь между исследуемыми характеристиками человека, но не определяли бы друг друга строго однозначно. В настоящее время «*регрессия*» и «*корреляция*» – основные понятия статистики.

Основная задача *корреляционного анализа* – выявление значимости связи между значениями различных случайных величин. Зависимость между величинами (в том числе и случайными), при которых одному значению одной величины (аргумента) отвечает одно или несколько вполне определенных значений другой величины, называется, соответственно, *однозначной* или *многозначной функциональной зависимостью* [11]. Зависимость между величинами, при которой каждому значению одной величины отвечает с соответствующей вероятностью множество возможных значений другой, называют *вероятностной* (стохастической, статистической). Примерами корреляционной связи являются зависимости между пределами прочности и текучести стали определенной марки, между погрешностями размера и погрешностью формы поверхности детали, между температурой испытания и прочностью материала и т. д.

Математический аппарат *регрессионного анализа* позволяет:

- оценить неизвестные параметры предлагаемой к исследованию регрессионной модели;
- проверить статистическую значимость параметров модели;
- проверить адекватность модели;
- оценить точность модели.

Вид регрессионной модели предлагает сам исследователь, при этом он исходит из следующего:

- физической сущности изучаемого объекта или явления;
- характера экспериментального материала;

- анализа априорной информации.

Самым простым для моделирования является объект, у которого один входной и один выходной фактор (рис. 5.1). Входной фактор характеризует воздействие на исследуемый объект. В технологических процессах машиностроения это могут быть температура, сила, время, геометрические параметры инструмента, характеристики обрабатываемого и инструментального материалов и т. д. Выходной фактор характеризует реакцию (отклик) объекта на воздействие входного фактора. Выходные факторы в технологических процессах машиностроения – длина пройденного инструментом пути, величина износа, напряжения, качество обработанной поверхности и т. д.

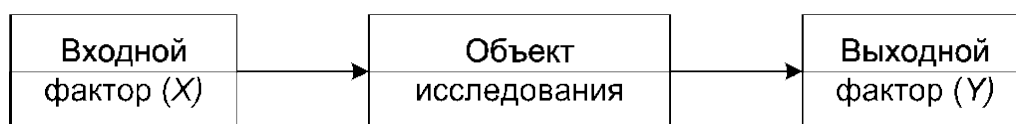


Рис. 5.1. Объект исследования с одним входным и одним выходным фактором

Для начала построения эмпирической модели необходимо иметь данные экспериментальных исследований объекта (в виде таблицы или графика), в которых каждому значению входного фактора (X) соответствует значение выходного фактора (Y), т. е. известна пара чисел (x_i, y_i) . Пары случайных переменных (x, y) подчиняются некоторому двумерному вероятностному распределению. Общее количество пар чисел пусть равно m (рис. 5.2).

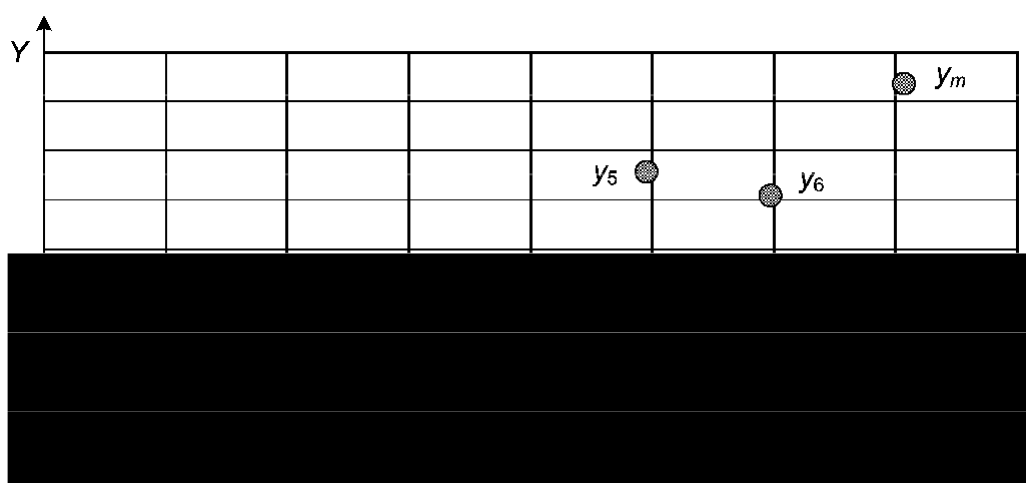


Рис. 5.2. Графическое отображение результатов эксперимента

Данный график называется *диаграммой рассеяния*, или *точечной диаграммой* [12]. Необходимо найти такую кривую, которая бы наилучшим образом аппроксимировала экспериментальные точки. Для удобства дальнейшего исследования объекта эта кривая должна иметь для своего описания одну единственную формулу (функцию). Если мы соединим точки на графике, то получим ломаную линию, состоящую из нескольких прямых отрезков и описываемую соответствующим количеством линейных моделей. Это крайне неудобно для исследования. Необходимо найти кривую, наилучшим образом описывающую все экспериментальные точки (рис. 5.3). Такую кривую называют *кривой регрессии*, или *регрессионной кривой Y по X* . В общем случае кривая регрессии может иметь любой вид (монотонно возрастающая, монотонно убывающая, с точками перегиба и т. д.), но она должна быть непрерывной, т. е. не должна иметь разрывов. В самом простом случае кривая регрессии имеет вид прямой линии.

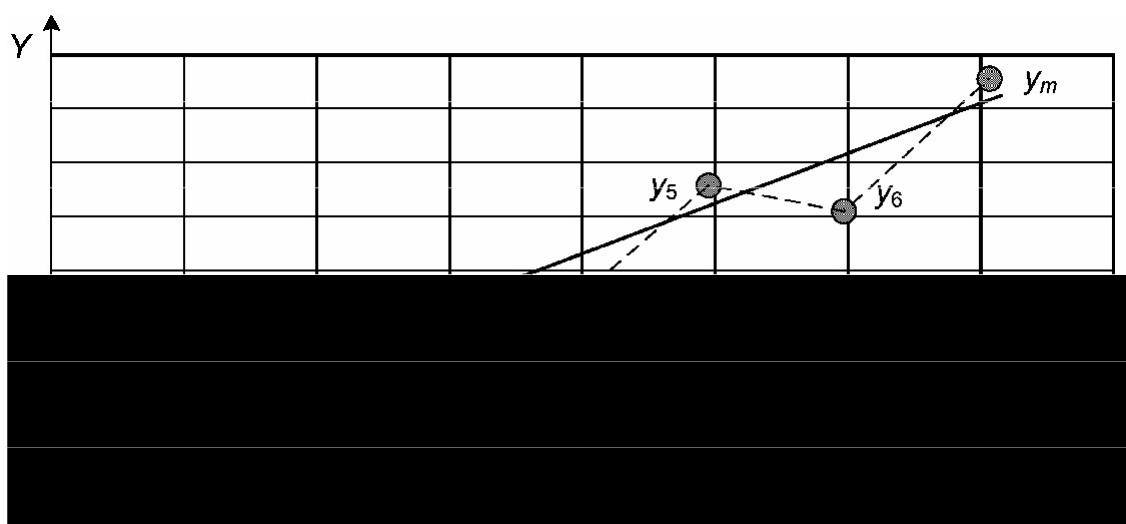


Рис. 5.3. Построение линии регрессии

Обычно построение моделей и исследование объекта начинают с самых простых моделей – *линейных*. Линейной модели соответствует кривая регрессии в виде *простой линии*.

Как видно из графика (см. рис. 5.3), всегда имеются отклонения экспериментальных точек от кривой регрессии, что вызвано влиянием других (неучтенных в модели) внешних факторов на исследуемый объект. В моделировании выходной фактор еще называют *зависимой выходной переменной*, а входной – *независимой входной переменной*. Во время исследования

объекта входной фактор всегда носит детерминированный характер, а выходной – случайный.

Выражение, которое устанавливает связь между случайной зависимой и детерминированной независимой переменными, представляет собой *уравнение регрессии*. Термин «уравнение регрессии», строго говоря, не совсем корректный [12], но общепринятый. Модель, построенная на основе уравнения регрессии, является *регрессионной моделью*. Как указывалось ранее, для получения регрессионных моделей (уравнений регрессии) используется математический аппарат регрессионного анализа.

Итак, как мы уже говорили, подбор кривой регрессии и регрессионной модели обычно начинают с простой прямой линии и, соответственно, с линейной модели. Если иметь неограниченно большое количество экспериментальных точек, то линейная регрессионная модель имеет вид [12]

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \epsilon, \quad (5.1)$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x, \quad (5.2)$$

где \hat{y} – значения выходной переменной, рассчитанные (предсказанные) по линейной модели;
 x – значения входной переменной;
 β_0 и β_1 – коэффициенты регрессии;
 ϵ – остаток (невязка).

Определение коэффициентов регрессии осуществляется на основе *метода наименьших квадратов*. Метод наименьших квадратов применяют в тех случаях, когда случайная вариация входного фактора пренебрежительно мала по сравнению с наблюдаемым диапазоном его измерения [12], т. е. значения входной переменной считаются фиксированными. Суть метода в том, что подбираются такие β_0 и β_1 , при которых сумма квадратов отклонений измеренных величин y от предсказанных \hat{y} была бы минимальной.

Для пар наблюдений можно записать

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i. \quad (5.3)$$

Отклонение измеренной величины y от предсказанной \hat{y}

$$\epsilon_i = y_i - \hat{y} = y_i - (\beta_0 + \beta_1)x. \quad (5.4)$$

Сумма квадратов отклонений выражается в виде

$$S = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2, \quad (5.5)$$

где S – функция суммы квадратов.

Подберем b_0 и b_1 так, чтобы при подстановке их вместо β_0 и β_1 значение S было минимальным из возможных. Найдем частные производные (∂):

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^m x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i). \quad (5.7)$$

Наименьшее значение суммы квадратов отклонений достигается в том случае, когда коэффициенты β_0 и β_1 удовлетворяют условию [11]

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0. \quad (5.8)$$

Имеющиеся экспериментальные данные в виде пар (x_i, y_i) являются лишь ограниченной выборкой из общего числа состояний исследуемого объекта. Поэтому можно определить только оценки коэффициентов β_0 и β_1 , которые обозначают, соответственно, b_0 и b_1 .

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \quad (5.9)$$

Такие модели в литературе часто называют *однофакторными регрессионными моделями*. Коэффициент регрессии b_1 определяется по формуле [12]

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.10)$$

где x_i – значение входного фактора во время эксперимента;
 y_i – значение выходного фактора, соответствующее x_i ;

\bar{x} – среднее значение входного фактора, определяемое по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}, \quad (5.11)$$

\bar{y} – среднее значение выходного фактора, определяемое по формуле

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}. \quad (5.12)$$

Коэффициент регрессии b_0

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (5.13)$$

Получаем

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x_i - \bar{x}), \quad (5.14)$$

где \bar{x} и \bar{y} – координаты «центра тяжести» экспериментальных данных, через который обязательно проходит линия регрессии.

5.2. Адекватность регрессионных моделей

На определении коэффициентов регрессионной модели построение модели не заканчивается. Необходимо установить адекватность и точность предлагаемой модели. *Адекватность модели* характеризует соответствие модели экспериментальным данным и статистическую значимость уравнения регрессии. Адекватность регрессионной модели оценивается коэффициентом Фишера ($F_{\text{расч}}$)¹

$$F_{\text{расч}} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (5.15)$$

¹ Вывод формулы дан в кн.: Драйнер Н. Прикладной регрессионный анализ. М.,

2007. 912 с.

Критерий Фишера представляет собой отношение суммы квадратов отклонений, обусловленных регрессией, к сумме квадратов отклонений относительно регрессии.

Формулируем нулевую гипотезу $H_0: b_1 = 0$. Расчетное значение коэффициента $F_{\text{расч}}$ необходимо сравнить с табличным значением $F_{\text{табл}}(m, \alpha)$. В этой записи m – общее количество экспериментальных наблюдений (x_i, y_i) , которое влияет на количество степеней свободы при определении критерия Фишера. α – уровень значимости – вероятность, с которой мы можем отвергнуть правильную гипотезу о модели как неправильную. Обычно в моделировании используют значения $\alpha = 0,05; 0,01$.

Если $F_{\text{расч}} > F_{\text{табл}}$, то нулевая гипотеза отвергается, модель считается адекватной, а регрессия – значимой. Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$, то регрессионная модель неадекватна и использовать ее для анализа и исследования объекта нельзя. В этом случае необходимо снова проанализировать априорную информацию, снова спланировать и провести эксперимент.

Значения коэффициента Фишера обычно даны в справочниках по математической статистике и теории вероятностей.

5.3. Точность регрессионных моделей

Для оценки точности регрессионных моделей с одной входной используется выборочный коэффициент корреляции Пирсона (r_{xy}), который определяется по формуле [12]

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\xi_i - \bar{\xi})^2 \sum_{i=1}^m (\psi_i - \bar{\psi})^2}}. \quad (5.16)$$

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует тесноту связи между выходной переменной y и входной переменной x . Область определения коэффициента корреляции r_{xy} лежит в пределах от -1 до $+1$ включительно. Можно выделить несколько частных случаев значения коэффициента корреляции (рис. 5.4)

Чем выше значение r_{xy} , тем теснее связь между выходной переменной y и входной переменной x , тем точнее, а следовательно, лучше математическая модель.

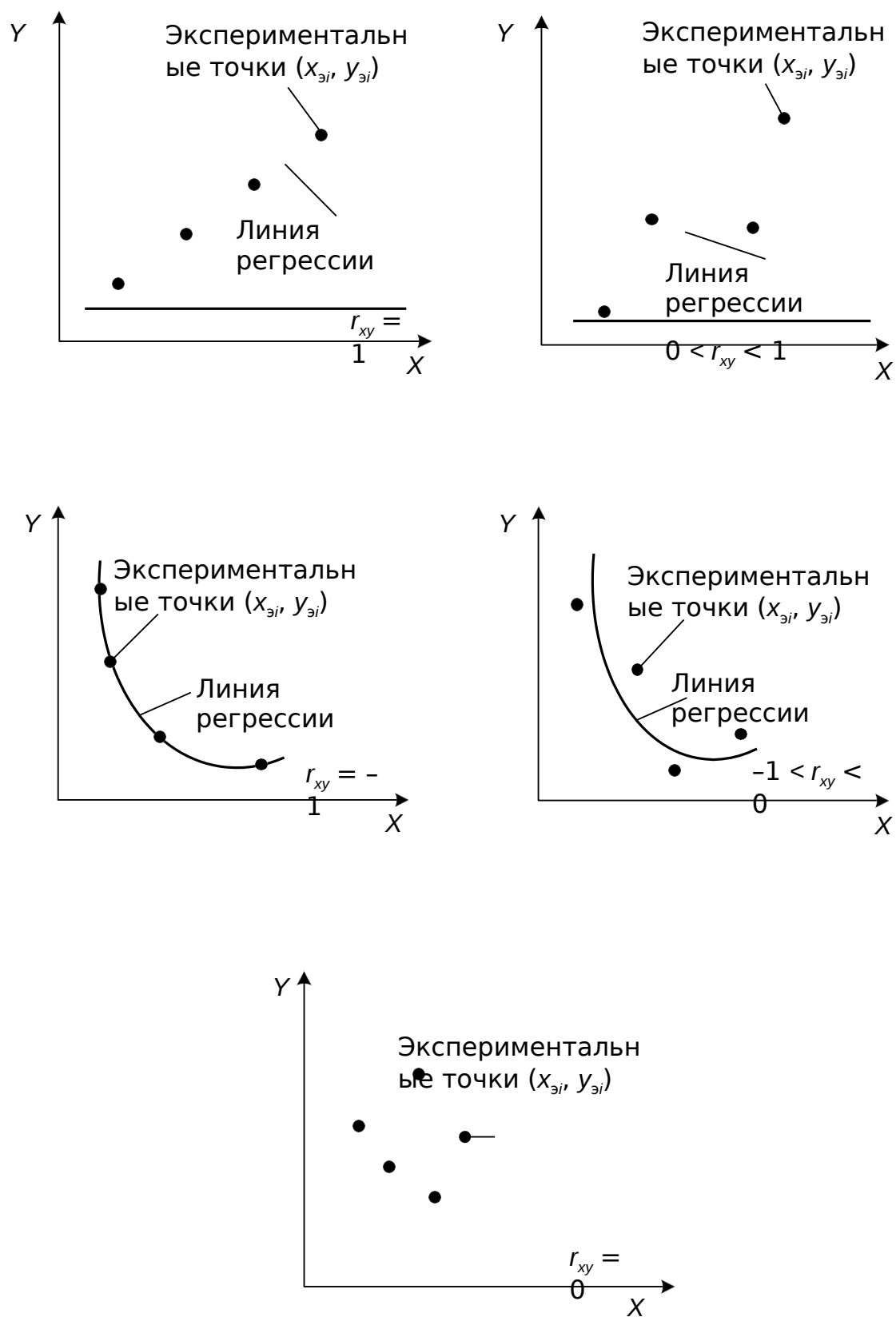


Рис. 5.4. Частные случаи значения коэффициента корреляции

Если модель имеет низкое значение r_{xy} , то она имеет низкую точность оценки и предсказания поведения или свойств объекта. Такую модель использовать для исследования, описания и предсказания объекта не рекомендуется. Из нескольких моделей, проанализированных во время моделирования, для исследования объекта выбирается та модель, у которой коэффициент корреляции r_{xy} имеет наибольшее значение. После расчета коэффициента корреляции производят проверку его значимости при помощи критерия Стьюдента. Коэффициент корреляции, рассчитанный для модели ($r_{расч}$), сравнивается с табличным (граничным) значением ($r_{табл}$). Если $r_{расч} > r_{табл}$, то $r_{расч}$ принимается как показатель тесноты связи и наоборот [10]. Табличные значения $r_{табл}$ можно найти в справочниках по теории вероятностей и математической статистике.

Если попытаться оценить стандартную ошибку для предсказанных значений выходного фактора \bar{y} , то наилучшие предсказания будут в «центре тяжести» эксперимента [12]. Чем дальше от «центра тяжести», тем менее точными будут предсказания \bar{y} .

5.4. Виды регрессионных моделей с одной входной переменной

Если в результате расчета коэффициента корреляции r_{xy} линейная модель признана недостаточно точной, переходят к исследованию более сложных моделей: *степенной* ($y = b_0 x^{b_1}$), *экспоненциальной* ($y = \exp(b_0 + b_1 x)$), *обратной* ($y = b_0 + \frac{b_1}{x}$ или $y = \frac{b_0 + b_1 x}{b_0 + b_1 x}$), *полинома* ($y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$).

Полином и обратные модели являются линейными по параметрам, поэтому для оценки их коэффициентов регрессии, корреляции и критерия адекватности можно использовать формулы (5.10), (5.13), (5.15), (5.16). Степенная и экспоненциальная модели требуют дополнительных преобразований в виде логарифмирования.

Вопросы для самоконтроля

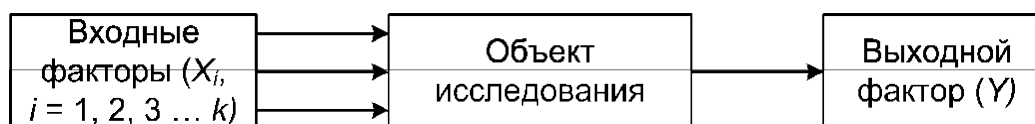
1. Что такое линия регрессии?
2. Что такое уравнение регрессии?
3. Какие модели называются регрессионными?
4. На основе какого метода определяются коэффициенты регрессии?
5. Как определяются коэффициенты регрессии однофакторной модели?

6. Каким критерием оценивается адекватность модели с одним входным фактором?
7. Что делать, если модель оказывается неадекватной?
8. Как оценивается точность однофакторной модели?
9. Где точность предсказаний значений выходного фактора выше?
10. Какими, кроме линейной, могут быть модели с одной входной переменной?

Глава 6. Регрессионные модели с несколькими входными переменными

6.1. Многофакторная (множественная) линейная регрессия

Рассмотрим основы построения регрессионных моделей для объекта с несколькими входными переменными (рисунок).



Объект исследования с несколькими входными факторами

Для построения модели необходимо иметь данные экспериментальных исследований объекта, представленные в виде таблицы, где каждой комбинации значений входных факторов соответствует значение выходного фактора.

Данные экспериментальных исследований объекта

Номер эксперимента	X_1	X_2	...	X_k	Y
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	...	x_{k3}	y_3
...					
m	x_{1m}	x_{2m}	...	x_{km}	y_m

В матрице X все элементы первого столбика равны единице. Будем считать это фиктивной входной переменной X_0 с постоянным значением.

$$\begin{array}{r}
 y_1 \\
 y_2 \\
 Y \quad y_3 \quad , \\
 \dots \\
 y_m
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 b_0 \\
 b_1 \\
 B \quad b_2 \quad . \\
 \dots \\
 b_k
 \end{array}
 . \quad (6.4)$$

Определим размерность этих матриц:

- Y – вектор наблюдений ($m \cdot 1$);
- X – матрица независимых переменных ($m(k + 1)$);
- B – вектор коэффициентов регрессии ($(k + 1) \cdot 1$).

Правила умножения матриц и векторов требуют, чтобы они были *согласованными* и имели соответствующую размерность [9, 12].

Пусть A – матрица размерностью ($n \cdot p$):

- на матрицу A только слева может быть умножена матрица B размерностью ($m \cdot n$):

$$B \cdot A = (m \cdot n \cdot n \cdot p) = C(m \cdot p); \quad (6.5)$$

- на матрицу A только справа может быть умножена матрица D размерностью ($p \cdot q$):

$$A \cdot C = (n \cdot p \cdot p \cdot q) = F(n \cdot q). \quad (6.6)$$

Следовательно, произведение $B \cdot X$ не существует и множественная линейная регрессия может быть записана в виде

$$Y = X \cdot B. \quad (6.7)$$

Использование аппарата линейной алгебры позволяет получить общую формулу для определения вектора, содержащего коэффициенты регрессии [9]:

$$B = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y, \quad (6.8)$$

где $(X' \cdot X)^{-1}$ – обратная матрица;
 X' – транспонированная матрица.

Определением коэффициентов регрессионной модели построение модели не заканчивается. Необходимо также определить адекватность и точность предлагаемой многофакторной модели.

6.3. Оценка адекватности и точности многофакторной линейной модели

Адекватность модели характеризует соответствие модели экспериментальным данным и статистическую значимость уравнения регрессии. Адекватность регрессионной модели оценивается коэффициентом Фишера

$$F_{\text{расч}} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (6.9)$$

Расчетное значение коэффициента ($F_{\text{расч}}$) необходимо сравнить с табличным значением ($F_{\text{табл}}(m, \alpha)$), где m – общее количество экспериментальных наблюдений, α – уровень значимости.

α – *уровень значимости* – вероятность, с которой правильная гипотеза о модели может быть отвергнута как неправильная. Обычно в моделировании (и мы об этом уже говорили) используют значения $\alpha = 0,05; 0,01$. Однако для многофакторных моделей табличное значение F-критерия зависит еще и от числа входных переменных [9].

Если $F_{\text{расч}} > F_{\text{табл}}$, то модель считается адекватной, а регрессия статистически значимой. Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$, то регрессионная модель неадекватна и регрессия статистически незначима.

Для оценки точности регрессионных моделей с несколькими входными переменными используется множественный коэффициент корреляции (R^2) [4], который определяется по формуле

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}. \quad (6.10)$$

Отношение R^2 характеризует тесноту связи между выходной переменной и входными переменными. Область определения отношения R^2 лежит в пределах от 0 до 1. При $R^2 = 0$ выходной фактор у линейно не за-

висит от входных факторов x_1, x_2, \dots, x_k – можно сказать, что корреляционная связь между выходным фактором и входными факторами отсутствует. При $R^2 = 1$ выходной фактор у линейно зависит от входных факторов x_1, x_2, \dots, x_k – имеется в наличии сильная корреляционная связь. Чем выше значение R^2 , тем теснее связь в модели между выходной переменной (фактором) и входными переменными (факторами), тем точнее, а следовательно, лучше математическая модель. Если модель имеет низкое значение R^2 , то она имеет низкую точность оценки и предсказания поведения или свойств объекта. Использовать такую модель для исследования, описания и предсказания объекта не рекомендуется. Из нескольких моделей для исследования выбирается та, у которой отношение R^2 имеет наибольшее значение.

6.4. Линейные регрессионные модели с несколькими входными переменными

Если в результате расчета отношения R^2 множественная линейная регрессия признана недостаточно точной, переходят к исследованию более сложных моделей:

- *полинома с одной независимой переменной* $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$;
- *полинома с несколькими независимыми переменными* $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2$;
- *обратной модели* $y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \frac{b_3}{x_3} + \frac{b_4}{x_4}$ или $y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \frac{b_3}{x_1^2} + \frac{b_4}{x_2^2} + \frac{b_4}{x_1x_2}$;
- *комбинированной модели* $y = b_0 + b_1x_1 + b_2\sqrt{x} + b_3\ln x + b_4\exp(x)$.

Исследователь сам может предложить вид многофакторной модели на основе анализа априорной информации. Оценка коэффициентов регрессии, критерия адекватности модели и множественного коэффициента корреляции осуществляется по формулам (6.8), (6.9), (6.10), рассмотренным ранее для «классической» множественной регрессии.

6.5. Нелинейные регрессионные модели с несколькими входными переменными

Если в результате построения линейных моделей ни одна из них не была признана достаточно точной, переходят к исследованию более слож-

ных моделей. Любую модель, в результате преобразования записываемую в виде (6.1), можно анализировать методами линейного регрессионного анализа.

Виды преобразований для нелинейных моделей [12]:

- обратное преобразование;
- логарифмическое преобразование;
- преобразование типа квадратного корня.

Если при помощи каких-либо преобразований нелинейная модель может быть приведена к виду множественной линейной регрессии, то она называется *нелинейной моделью с «внутренней линейностью»* [11]. К таким моделям относятся:

- *степенная (мультипликативная) модель* $y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots x_k^{b_k}$.

Выполним преобразования: $\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_k \ln x_k$. Введем переобозначения: $\ln x_i = z_i$, $w = b_0^* + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_k z_k$. Данная модель

имеет вид многофакторной линейной регрессии (см. формулу (6.1)), следовательно, *степенная* модель может быть преобразована логарифмированием к виду многофакторной линейной регрессии. Это позволяет использовать для расчета коэффициентов регрессии, критерия адекватности и множественного коэффициента корреляции формулы, рассмотренные выше. После вычислений необходимо выполнить потенцирование [11] и вернуться к исходному степенному виду модели;

- *экспоненциальная модель* $y = \exp(b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_k x_k)$.

Логарифмирование также позволяет преобразовать экспоненциальную модель к виду многофакторной линейной модели (формула 6.1) и использовать для ее исследования аппарат линейного регрессионного анализа;

- *обратная модель* $y = \frac{1}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k}$. Выполним преобразования: $\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$. Введем переобозначения $\frac{1}{y} = w$,

$w = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$. Следовательно, обратная модель также может быть преобразована к виду множественной линейной регрессии, что позволяет использовать для ее исследования аппарат линейного регрессионного анализа.

Если при помощи любых преобразований нелинейная модель не может быть приведена к виду множественной линейной регрессии, то она на-

зывается *нелинейной моделью с «внутренней нелинейностью»*. Для иссле-

дования этих моделей в математике разработан аппарат нелинейного регрессионного анализа [12].

6.6. Шаговые методы построения регрессионных моделей

На практике при исследовании объектов и построении регрессионных моделей с несколькими входными переменными используют шаговые (итерационные) методы, позволяющие обоснованно включать в модель только наиболее влиятельные и значимые входные факторы. Чаще всего применяются *метод исключения переменных* и *метод включения переменных*.

Метод исключения переменных состоит из нескольких этапов [12]:

- Этап 1: предлагается регрессионная модель, включающая все исследуемые входные переменные.
- Этап 2: рассчитывается частный F -критерий Фишера для каждой входной переменной F_{x_i} и оценивается статистическая значимость каждой входной переменной аналогично тому, как это выполняется для модели в целом.
- Этап 3: устанавливается входная переменная с минимальным значением F_{x_i} .
- Этап 4: минимальное значение F -критерия сравнивается с граничным значением.

Если $F_{\min} > F_{\text{табл}}(m, \alpha)$, то соответствующая входная переменная считается статистически значимой и остается в модели. Следовательно, предложенная на этапе 1 модель статистически значима, адекватна и может быть использована для исследования объекта. Анализ оставшихся входных переменных уже не проводится. Далее рассчитываются коэффициенты регрессии и множественный коэффициент корреляции.

Если $F_{\min} < F_{\text{табл}}$, то соответствующая входная переменная статистически незначима и должна быть удалена из модели как неадекватная. Следует помнить, что для многофакторных моделей табличное значение F -критерия зависит еще и от числа входных переменных [9, 12].

• Этап 5: после удаления статистически незначимой входной переменной для оставшихся входных переменных снова пересчитываются их частные F -критерии.

• Этап 6: снова устанавливается входная переменная (из оставшихся) с минимальным значением F_{x_i} .

- Этап 7: этапы 4, 5, 6 повторяются до тех пор, пока в модели не останутся только статистически значимые переменные.

Если после выполнения указанных процедур в модели не останется ни одной статистически значимой переменной, то модель построить нельзя. Скорее всего, причина в просчетах, допущенных при планировании эксперимента на основе анализа априорной информации. В этом случае следует снова внимательно проанализировать априорную информацию, заново спланировать и провести эксперимент и обработать его результаты.

Если в модели остаются входные переменные, то переходят к расчету коэффициентов регрессии и оценке точности модели.

Метод включения переменных также состоит из этапов:

- Этап 0: в «модели» нет ни одной входной переменной.
- Этап 1: рассчитывается корреляционная матрица (из частных коэффициентов корреляции входных переменных друг с другом и с выходной переменной)

$$\begin{array}{cccccc}
 R_{1y} & R_{11} & R_{21} & R_{31} & \dots & R_{k1} \\
 R & R & R & R & \dots & R \\
 R_{3y}^2 & R_{13}^{12} & R_{23}^{22} & R_{33}^{32} & \dots & R_{k3}^{k2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 R_{ky} & R_{1k} & R_{2k} & R_{3k} & \dots & R_{kk}
 \end{array} ,$$

где R_{ky} – частный коэффициент корреляции k -й входной переменной и выходной переменной.

R_{ij} – частный коэффициент корреляции i -й и j -й входных переменных ($i = 1, k ; j = 1, k ; i \neq j$).

- Этап 2: выбирается входная переменная с максимальным коэффициентом корреляции R_{iy} . Эта переменная первой вводится в модель.

- Этап 3: определяется частный F -критерий введенной входной переменной, который одновременно является критерием адекватности всей модели.

Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$, то соответствующая входная переменная статистически незначима, т. е. должна быть удалена из модели, а сама модель неадекватна. Оставшиеся входные переменные имеют с выходной переменной еще менее тесную корреляционную связь. Следовательно, в данной ситуации модель построить не представляется возможным.

Если $F_{\text{расч}} > F_{\text{табл}}(m, \alpha)$, то соответствующая входная переменная считается статистически значимой и остается в модели.

- Этап 4: корреляционная матрица пересчитывается без учета влияния выбранной входной переменной.

- Этап 5: из оставшихся входных переменных выбирается переменная с максимальным коэффициентом корреляции R_{iy} . Эта переменная вводится в модель следующей.

- Этап 6: определяется F -критерий новой модели.

Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}$, то вновь введенная в модель входная переменная статистически незначима и должна быть удалена из модели как неадекватная. В модели остается одна входная переменная.

- Этап 7: процедуры 4, 5, 6 повторяются до тех пор, пока не сформируется окончательный вид модели. Далее переходят к расчету коэффициентов регрессии и оценке точности модели.

Сравнивая данные методы, можно сказать следующее:

- Метод исключения входных переменных дает вполне удовлетворительные результаты при моделировании.

- Метод включения входных переменных более экономичен в вычислительном аспекте.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое многофакторная линейная регрессия?
2. Как оценивается точность многофакторной линейной регрессионной модели?
3. Как оценивается адекватность многофакторной линейной регрессионной модели?
4. Какие значения может принимать множественный коэффициент корреляции?
5. Что такое нелинейные модели с «внутренней линейностью»?
6. Какие бывают нелинейные модели с «внутренней линейностью»?
7. Что такое нелинейные модели с «внутренней нелинейностью»?
8. Обозначьте основные этапы метода включения переменных.
9. Что такое корреляционная матрица?
10. Что такое частный критерий Фишера для входной переменной? Что он характеризует?
11. Обозначьте основные этапы метода исключения переменных.

Глава 7. Интерпретация и оптимизация регрессионных моделей

7.1. Интерпретация модели

После построения регрессионной модели, оценки ее адекватности и точности, расчета коэффициентов регрессии переходят к анализу полученных результатов. Этот этап называется *интерпретацией*.

Интерпретация – «перевод» результатов математического описания исследуемого объекта с языка математики на язык пользователя (схемы, графики, таблицы и т. д.).

На этапе интерпретации оценивается, насколько результаты (в частности, модель) соответствуют здравому смыслу и существующей информации о поведении и свойствах объекта. Интерпретацию можно рассматривать как этап, обратный формализации.

Обозначим основные шаги интерпретации.

1. Анализ значений коэффициентов регрессии

Технологические процессы в машиностроении не относятся ни к области микромира, ни к области макромира. Если значения коэффициентов регрессии подозрительно велики или малы, то это может быть следствием ошибки в расчетах. Следует выполнить проверку полученных результатов.

2. Анализ знаков перед коэффициентами регрессии

На этом этапе устанавливается, в какой мере и как каждый входной фактор влияет на отклик объекта. Знаки коэффициентов регрессии указывают на характер влияния входных факторов на выходной фактор. Сравнивая результаты моделирования и априорную информацию об объекте, можно сделать вывод о пригодности полученной модели для описания, объяснения и предсказания поведения и свойств объекта.

3. Анализ расчетных значений выходной переменной (выполняется графически)

На этом этапе анализируется, насколько значения выходного фактора, предсказанные по выбранной модели, отличаются от экспериментальных данных. По результатам сравнения также можно сделать вывод о пригодности полученной модели для описания, объяснения и предсказания поведения и свойств объекта.

Современное программное обеспечение, которое применяется для статистического моделирования (STATISTICA, STATGRAPHICS, SPSS

и др.), позволяет объединить указанные этапы и выполнить интерпретацию модели графоаналитическим способом, т. е. используя широкие возможности построения графиков и поверхностей отклика.

7.2. Оптимизация модели

Большое количество задач управления, планирования и проектирования связано с проблемой оптимизации, сводимой к отысканию таких значений входных факторов, при которых критерий оптимизации достигает экстремума [13].

Можно выделить два основных подхода к решению задачи оптимизации. Первый связан с созданием теории процесса и его детерминированной (или аналитической) модели. В этом случае для решения задачи используются методы линейного, нелинейного и динамического программирования, принцип максимума и т. д. [13, 14, 15]. Вторым подходом – эмпирическим и в настоящее время используется значительно чаще. Появились и эмпирические способы оптимизации – метод Бокса-Уилсона и симплекс-планирование.

При решении задачи оптимизации необходимо выбрать метод поиска оптимального решения в зависимости от особенностей исследуемого объекта и применить его для получения «наилучших» характеристик или вариантов поведения объекта или воздействия на него. Если количество входных факторов (k) равно или больше 2, то графическим отображением результатов моделирования объекта является, соответственно, поверхность или гиперповерхность отклика. Ранее мы уже говорили, что в этом случае выходной фактор называется критерием оптимизации.

Решая задачу поиска экстремальных значений критерия оптимизации при построении моделей, следует помнить, что линейные, степенные, экспоненциальные, обратные функции не имеют экстремумов. Следовательно, регрессионные модели на их основе тоже не будут иметь экстремумов. Поэтому в данном случае в качестве моделей для описания объекта целесообразнее использовать полиномы четных степеней.

Бокс и Уилсон предложили шаговый метод исследования поверхности отклика – метод крутого восхождения (или метод наискорейшего спуска) [13, 14, 15], в основе которого лежит использование *градиента функции*. Движение по градиенту обеспечивает кратчайший путь к оптимуму и дает возможность в сложной многофакторной ситуации вести поиск целенаправленно.

Градиентом непрерывной однозначной функции называется вектор

$$\text{grad}(y) = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial y}{\partial x_3} \vec{k}.$$

Градиент всегда направлен в сторону увеличения функции. Следовательно, если перемещаться по градиенту, то можно достичь максимума функции отклика, а если двигаться в направлении, противоположном градиенту, то минимума [13]. Современное программное обеспечение, которое используется для статистического моделирования (STATISTICA, STATGRAPHICS и др.), позволяет исследователю избежать многочисленных вычислительных процедур, так как дает возможность графически отображать результаты поиска экстремумов функции.

Если поставленную оптимизационную задачу не удалось решить, то, скорее всего, следует перенести область проведения эксперимента, спланировать и провести эксперимент заново, построить новые регрессионные модели и попытаться определить наличие экстремумов (возможно, локальных) критерия оптимизации и соответствующих им значений входных факторов.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое интерпретация модели?
2. Для чего выполняется интерпретация модели?
3. Обозначьте этапы интерпретации модели.
4. Что такое градиент функции?
5. Почему при отыскании максимума критерия оптимизации можно перемещаться по градиенту?
6. Что делать, если не удалось решить задачу оптимизации для исследуемого объекта?

Заключение

Нами были рассмотрены основы теории моделирования, планирования эксперимента и построения регрессионных моделей для исследования технологических процессов машиностроительного производства.

Необходимость использования моделей и моделирования, прежде всего математических, определяется возможностью с их помощью решения сложных задач исследования, прогнозирования и оптимизации технологических процессов в машиностроении. В настоящее время для более интенсивного использования математических моделей имеются научно-методические, информационные, программно-технические и социальные предпосылки [1]. Созданное для специалистов математическое и программное обеспечение сделало моделирование широко используемым профессиональным инструментом для решения сложных задач оптимального технологического проектирования.

Данное учебное пособие, разработанное для студентов профессионально-педагогических вузов по специальности 050501.65 Профессиональное обучение (специализация 050501.08 Технологии и оборудование машиностроения), упорядочивает, структурирует и развивает знания студентов по различным вопросам и аспектам моделирования, полученные ими при изучении технических дисциплин.

Библиографический список

1. Кузьмин В. В. Математическое моделирование технологических процессов сборки и механической обработки изделий машиностроения: учебник для вузов / В. В. Кузьмин [и др.]. Москва: Высшая школа, 2008. 279 с.
2. Ашихмин В. Н. Введение в математическое моделирование: учебное пособие / В. Н. Ашихмин [и др.]; под ред. П. В. Трусова. Москва: ЛОГОС, 2005. 440 с.
3. Советов Б. Я. Моделирование систем: учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. 3-е изд., перераб и доп. Москва: Высшая школа, 2001. 343 с.
4. Зобнин Б. Б. Моделирование систем: конспект лекций / Б. Б. Зобнин. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2001. 129 с.
5. Дьяконов В. П. Новые информационные технологии: учебное пособие / В. П. Дьяконов [и др.]; под ред. В. П. Дьяконова. Москва: СОЛОН-Пресс, 2005. 640 с.
6. Саблина Н. Г. Информационные технологии: конспект лекций: в 2 частях / Н. Г. Саблина, Г. М. Черногородова. Екатеринбург: Изд-во УГТУ – УПИ, 2001. Ч. 2. 119 с.
7. Дулов В. Г. Математическое моделирование в современном естествознании: учебное пособие / В. Г. Дулов, В. А. Цибаров; под ред. В. Г. Дулова. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 244 с.
8. Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике: учебник для вузов / В. С. Зарубин [и др.]; под ред. В. С. Зарубина. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 496 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. Москва: Наука, 1972. 830 с.
10. Спириин Н. А. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: учебное пособие / Н. А. Спириин [и др.]; под ред. Н. А. Спирина; ГОУ ВПО УГТУ – УПИ. Екатеринбург, 2003. 260 с.
11. Рогов В. А. Методика и практика технических экспериментов: учебное пособие / В. А. Рогов. Москва: Академия, 2005. 288 с.
12. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ: перевод с английского / Н. Дрейпер, Г. Смит. 3-е изд. Москва: Вильямс, 2007. 912 с.

13. Адлер Ю. П. Теория эксперимента: прошле, настоящее, будущее / Ю. П. Адлер, Ю. В. Грановский, Е. В. Макарова. Москва: Знание, 1982. 64 с.

14. Цирлин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами / А. М. Цирлин. Москва: Энергопромиздат, 1986. 400 с.

15. Ногин В. Ю. Основы теории оптимизации / В. Ю. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. Москва: Высшая школа, 1986. 384 с.